193

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

18. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1923

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig

Inhaltsverzeichnis

Seite

Bilz, E., Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis situs . . . 1

Fischer, E., Modulsysteme und Differentialgleichungen 230

Khintchine, A., Über dyadische Brüche 109

Khintchine, A., Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen 289

Knopp, K., Über das Eulersche Summierungsverfahren. (II. Mitteilung) . . . 125

Kowalewski, G., Integrationslose Berechnung invarianter Bogen- und Flächenelemente ebener Transformationsgruppen 307

Lagally, M., Die isometrische Verbiegung einer Fläche durch schrittweise Näherung 312

Ore, Ö., Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien 278

Perron, O., Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. 42

Perron, O., Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation 157

Pólya, G., Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung 96

Remak, R., Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes. (Zweiter Teil) . . 173

Riesz, Fr., Über die Randwerte einer analytischen Funktion 87

Riesz, Fr., Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel 117

Study, E., Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. I. 55

Study, E., Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. II. 201

Tietze, H., Nachträgliche Bemerkung zu dem Aufsatz: „Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen“ 324

66 53031

QA1
M88
V.18-20

Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis situs.

Von

Ernst Bilz in Erlangen.

Die Analysis situs will bekanntlich die Invarianten in bezug auf alle umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen kontinuierlicher Mannigfaltigkeiten aufstellen; sie sucht notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß sich zwei kontinuierliche Mannigfaltigkeiten umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander beziehen lassen. Neben dieser Analysis situs kontinuierlicher Mannigfaltigkeiten hat sich in neuerer Zeit unter dem Einfluß funktionentheoretischer Untersuchungen[1]) eine kombinatorische Analysis situs entwickelt[2]). Diese setzt an Stelle der kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten gewisse Zellenkomplexe, die sich aus einer endlichen Anzahl von Elementen aufbauen, zwischen welchen eine endliche Anzahl von Verknüpfungen festgelegt sind. An Stelle der umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen tritt für die rein kombinatorisch zusammengesetzten Zellenkomplexe eine Beziehung, welche durch die ebenfalls kombinatorisch definierte Operation der Unterteilung eingeführt wird. Es werden nämlich zwei Zellenkomplexe als äquivalent betrachtet und im folgenden als „verwandt“ bezeichnet[3]), wenn es einen Komplex gibt,

[1]) Vgl. Dyck: Beiträge zur Anal. situs I, Math. Ann. **32**, S. 457—512.

[2]) Dehn-Heegard: Analysis situs, Enc. III AB 3. — Tietze: Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Monatshefte f. Math. u. Phys. **19** (1908), S. 1ff. — Steinitz: Beiträge zur Analysis situs, Sitzungsber. d. Berliner Mathem. Gesellschaft, 7. Jahrg. (1908), S. 42ff. — Brunn: Über die Bausteine der Analysis situs, Archiv der Math. u. Phys. III **22** (1914), S. 43ff.

[3]) Dehn-Heegard schreiben „homöomorph“, ebenso Tietze a. a. O. Diese Bezeichnung bezieht sich aber auch und zwar in erster Linie auf die topologisch äquivalenten kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten. In Untersuchungen, die gleichzeitig mit Begriffen der Analysis situs kontinuierlicher Mannigfaltigkeiten wie mit jenen der kombinatorischen Analysis situs arbeiten, kann es aber notwendig sein, zwischen den beiderlei Äquivalenzbegriffen zu unterscheiden. Mit der Bezeichnung „verwandt“, die sich an Möbius „elementarverwandt“ anschließt, folge ich einem Vorschlag des Herrn Professor Tietze, vgl. dessen Hamburger Vorträge, Hamb. Math. Einzelschriften, 2. Heft, Verlag d. math. Seminars.

der aus beiden durch die Operation der Unterteilung gewonnen werden kann.

Grundlegend für die kombinatorische Analysis situs ist die Einteilung der Zellenkomplexe in Klassen von untereinander verwandten Komplexen. Diese Klasseneinteilung stützt sich auf den Satz, daß zwei Zellenkomplexe, die einem dritten Komplex verwandt sind, untereinander verwandt sind.

Auf die Notwendigkeit, diesen anschaulich plausiblen Satz durch einen Beweis zu begründen, hat Tietze a. a. O. hingewiesen und selbst einen Beweis für den Fall von zwei Dimensionen ausgeführt[4]). Im folgenden gebe ich in Anlehnung an das von Tietze angegebene Verfahren einen Beweis des Satzes für den Fall von drei und vier Dimensionen. Dabei werden aber zwei Zerlegungssätze verwendet, die das Analogon darstellen zum Jordanschen Kurvensatz bzw. einer Verallgemeinerung dieses Satzes (Zerlegung des dreidimensionalen sphärischen Raumes durch eine der Kugelfläche homöomorphe Fläche in zwei Elementarräume)[5]). Der (zweidimensionale) dem Jordanschen Kurvensatz analoge kombinatorische Satz läßt sich nun leicht mittels des Eulerschen Polyedersatzes beweisen. Hingegen ist für den anderen (dreidimensionalen) Satz eine Begründung m. W. noch nicht gegeben worden[5a]), die zum vollen Abschluß unseres Beweises für den Fall von *vier* Dimensionen noch aussteht.

Im folgenden wird zum besseren Verständnis eine systematische Darstellung des Aufbaues der Zellenkomplexe, wie sie sich gerade für unsere Zwecke besonders empfehlen dürfte, vorangeschickt (§§ 1, 3, 5). Ferner wird das Verfahren, welches Tietze zum Beweis des obengenannten Satzes im Fall von zwei Dimensionen angibt, in derart abgeänderter Fassung beschrieben, wie sie der später angegebenen Weiterbildung der Methode für höhere Dimensionen entspricht (§ 2). Darnach wird der Fall von drei und vier Dimensionen erledigt, der vierdimensionale Fall mit dem oben gegebenen Vorbehalt (§§ 7, 8). Ein letzter Abschnitt weist auf die Stelle im Beweisverfahren hin, die einer Verallgemeinerung für den Fall von mehr als vier Dimensionen Schwierigkeiten bietet (§ 9).

---

[4]) Tietze a. a. O. [2]) § 19, S. 106, ferner neuerdings D. M. V. 29 (1920), Anm. 15, S. 110–111.

[5]) Vgl. Encykl. a. a. O., Ziff. 4 u. 5, S. 168. Näheres § 7, Nr. 93.

[5a]) Von Herrn Hellmuth Kneser, der sich gleichfalls mit diesem Zerlegungssatz beschäftigt hat, erhalte ich die Mitteilung, daß neuerdings J. W. Alexander II [Am. M. S. Bull. 28 (1922), S. 10] den fraglichen Satz für n Dimensionen bewiesen hat.

§ 1.

Definition von Punkt- und Streckenkomplexen.

Die Definitionen und Erklärungen, welche zunächst aufzustellen sind, sollen das Kombinatorische aus dem durch die Anschauung gegebenen Gedanken erfassen, wie man Liniengebilde oder Streckenzüge — auch geschlossene oder verzweigte — aus einzelnen Strecken durch Aneinanderfügen aufbauen kann.

1. Eine erste Art von Elementen sind die Elemente nullter Dimension oder Punkte. Sie werden hier durch kleine lateinische Buchstaben mit oberem Index 0 bezeichnet, z. B. a^0.

2. Eine Zusammenfassung von endlich vielen Punkten heißt ein nulldimensionaler Komplex oder Punktkomplex.

3. Wegen ihrer Bedeutung für später folgende Definitionen werden zwei Typen von Punktkomplexen besonders ausgezeichnet, die Punktmannigfaltigkeiten genannt werden: eine nulldimensionale Elementarmannigfaltigkeit E^0 besteht aus einem einzigen Punkt; eine nulldimensionale sphärische Mannigfaltigkeit Σ^0 besteht aus zwei Punkten (Punktepaar).

4. Eine zweite Art von Elementen sind die Elemente erster Dimension oder Streckenelemente. Sie werden hier durch kleine deutsche Buchstaben mit oberem Index 1 bezeichnet, z. B. $\mathfrak{a}^1$.

Es sollen Zusammenfassungen von endlich vielen Elementen nullter und erster Dimension betrachtet werden, wobei zwischen den Elementen verschiedener Dimension eine gegenseitige Beziehung des Angehörens oder Nichtangehörens bestehen soll.

5. Um zu den besonderen Elementzusammenfassungen zu kommen, die unten als eindimensionale Komplexe eingeführt werden, wird der Begriff *Strecke* erklärt. Sei ein Punktepaar

$$\Sigma^0 = \{a_1^0, a_2^0\}$$

gegeben. Zu diesem Punktepaar werde ein eindimensionales Element $\mathfrak{a}^1$ hinzugenommen mit der Bestimmung, daß zwischen diesem Element $\mathfrak{a}^1$ einerseits und jedem der Elemente von Σ^0 andererseits die gegenseitige Beziehung des Einanderangehörens gelten soll. Die so gebildete Zusammenfassung heißt eine eindimensionale Zelle oder eine Strecke; wir schreiben sie

$$a^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}^1),$$

wir sagen, das Punktepaar $\Sigma^0 = \{a_1^0, a_2^0\}$ bildet den Rand der Strecke a^1; die Punkte a_1^0 und a_2^0 heißen die Punktelemente der Strecke a^1 und

mögen als solche auch mit $\mathfrak{a}_1^0$ und $\mathfrak{a}_2^0$ bezeichnet werden; das Element $\mathfrak{a}^1$ heißt das Streckenelement der Strecke a^1.

6. Nunmehr wird erklärt: Ein eindimensionaler Komplex oder Streckenkomplex ist eine Zusammenfassung von endlich vielen Elementen nullter und erster Dimension, in welcher

a) jedes Streckenelement zusammen mit den ihm angehörenden Punktelementen genau eine Strecke bildet und

b) jedes Punktelement mindestens einem Streckenelement angehört.

7. Unter dem Rand eines Streckenelements in einem Streckenkomplex verstehen wir den Punktkomplex, der aus allen Punktelementen besteht, welche dem Streckenelement im Streckenkomplex angehören.

8. Unter dem Umgebungskomplex eines Punktelements in bezug auf einen Streckenkomplex verstehen wir einen Punktkomplex, welcher so viele Punkte enthält, als dem betreffenden Punktelement im Streckenkomplex Streckenelemente angehören.

9. Mit Hilfe der Begriffe „Rand“ und „Umgebungskomplex“ können obige Definitionseigenschaften eines Streckenkomplexes auch so gefaßt werden:

a) Zu jedem Streckenelement gehört als Rand im Streckenkomplex ein Punktepaar.

b) Zu jedem Punktelement gehört als Umgebungskomplex in bezug auf den Streckenkomplex ein Punktkomplex.

10. Ein Punkt- oder Streckenkomplex P_1 heißt Teilkomplex eines Streckenkomplexes P, wenn sämtliche Elemente von P_1 und ihre Angehörigkeitsbeziehungen mit Elementen aus P und deren gegenseitigen Angehörigkeitsbeziehungen identisch sind. Wir sagen auch, P *enthält* den Komplex P_1, oder, wenn P_1 ein Punktkomplex ist, P_1 *liegt auf* P.

Aus den Eigenschaften (9) folgt, daß die einfachsten eindimensionalen Teilkomplexe eines Streckenkomplexes eben die eindimensionalen Zellen oder Strecken sind.

11. Zwei Streckenkomplexe heißen gleich, wennn sie — gegebenenfalls nach Änderung der Bezeichnung ihrer Elemente — identisch sind.

§ 2.

Unterteilung von Streckenkomplexen; der Hauptsatz über verwandte Komplexe; eindimensionale Mannigfaltigkeiten.

Die Anschauung lehrt, daß man in einem Liniengebilde einzelne Linienstücke durch Teilungspunkte in Teilstücke gliedern kann, ohne daß dadurch der Zusammenhangscharakter des Gebildes, die Zahl und Art etwa vorhandener Knotenpunkte, an denen mehr als zwei Linienstücke

zusammenstoßen, und die Zahl der Endpunkte, zu denen nur ein Linienstück führt, geändert wird.

Von diesem Gedanken geleitet, erklären wir im folgenden die Operation der *Unterteilung* eines Streckenkomplexes.

12. Unter einer *elementaren Unterteilung* eines Streckenkomplexes versteht man die Abänderung einer im Komplex enthaltenen Strecke

$$a^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}^1),$$

wobei

$$\Sigma^0 = \{a_1^0 = \mathfrak{a}_1^0;\ a_2^0 = \mathfrak{a}_2^0\},$$

nach dem Schema:

a) Einführung eines neuen Punktes

$$x^0 = \mathfrak{x}^0,$$

b) Ersatz des Streckenelements $\mathfrak{a}^1$ durch zwei Streckenelemente $\mathfrak{a}_1^1$ und $\mathfrak{a}_2^1$ mit der Bestimmung, daß $\Sigma_1^0 = \{a_1^0, x^0\}$ den Rand von $\mathfrak{a}_1^1$ und $\Sigma_2^0 = \{x^0, a_2^0\}$ den Rand von $\mathfrak{a}_2^1$ bilden soll.

Die Strecke

$$a^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}^1); \qquad \Sigma^0 = \{a_1^0, a_2^0\}$$

wird also gewissermaßen transformiert in dem Streckenkomplex

$$\{a_1^1 = (\Sigma_1^0, \mathfrak{a}_1^1),\quad a_2^1 = (\Sigma_2^0, \mathfrak{a}_2^1)\},$$

wobei

$$\Sigma_1^0 = \{a_1^0, x^0\},\ \Sigma_2^0 = \{x^0, a_2^0\}.$$

13. Unter einer Unterteilung eines Streckenkomplexes versteht man eine Abänderung des Komplexes, die sich aus einer Reihe von endlich vielen sukzessiven elementaren Unterteilungen ergibt. Jeder durch eine solche Abänderung aus einem Komplex P entstehende Komplex (sowie P selbst) heißt ein unterteilter oder abgeleiteter Komplex von P; desgleichen jeder einem solchen Komplexe gleiche (11) Komplex.

14. Zwei Komplexe heißen *verwandt*, wenn es einen Komplex gibt, der aus jedem der beiden abgeleitet werden kann.

15. Hauptsatz über Unterteilungen: Werden aus einem Streckenkomplex P zwei verschiedene Komplexe Q und R abgeleitet, so gibt es einen Komplex S, der aus jedem der beiden Komplexe Q und R abgeleitet werden kann. Zunächst kann man sich den Komplex Q aus dem Komplex P entstanden denken durch Transformation beliebiger Strecken

$$a^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}^1), \qquad \Sigma^0 = \{a_1^0, a_2^0\}$$

des Komplexes P nach der Vorschrift:

a) Einführung von m neuen Punkten

$$x_1^0 = \mathfrak{x}_1^0, \ldots, x_m^0 = \mathfrak{x}_m^0.$$

b) Ersatz des Streckenelements $\mathfrak{a}^1$ durch $m+1$ Streckenelemente

$$\mathfrak{a}_1^1, \ldots, \mathfrak{a}_m^1, \mathfrak{a}_{m+1}^1,$$

welche von den Punktepaaren

$$\Sigma_1^0 = \{a_1^0, x_1^0\}, \quad \Sigma_2^0 = \{x_1^0, x_2^0\}, \ldots, \quad \Sigma_m^0 = \{x_{m-1}^0, x_m^0\}, \quad \Sigma_{m+1}^0 = \{x_m^0, \mathfrak{a}_2^0\}$$

berandet werden.

Nach der gleichen Vorschrift denke man sich auch den Komplex R aus P gewonnen.

16. Bei der Ableitung des Komplexes Q aus dem Komplex P wird sonach zur Transformation jeder einzelnen Strecke a^1 von P eine gewisse Anzahl m_Q von neuen Punkten eingeführt, ebenso wird bei der Ableitung des Komplexes R aus P zur Transformation jeder einzelnen Strecke a^1 von P eine gewisse Anzahl m_R neuer Punkte eingeführt. Von den so zu jeder Strecke a^1 bestimmten Zahlen m_Q und m_R wähle man die größere aus und bezeichne sie mit m_S. Darnach bilde man aus P einen abgeleiteten Komplex S derart, daß man zur Transformation jeder Strecke a von P gerade m_S neue Punkte einführt. Dieser Komplex S ist dann offenbar von der im Hauptsatz (15) verlangten Art, d. h. es läßt sich sowohl aus Q wie aus R ein dem Komplex S gleicher Komplex durch Unterteilung ableiten.

17. Aus dem Hauptsatz (15) folgt: Sind zwei Streckenkomplexe einem dritten Komplex verwandt, so sind sie unter sich verwandt.

Daher lassen sich die Streckenkomplexe in Verwandtschaftsklassen einteilen. Die Invarianten in bezug auf die Operation der Unterteilung können als Eigenschaften der Verwandtschaftsklassen angesprochen werden.

Wegen ihrer Bedeutung für den weiteren Aufbau ist die genaue Kenntnis einiger besonderer Klassen von Streckenkomplexen notwendig.

18. Ein Streckenkomplex heißt *zusammenhängend*, wenn es *nicht* möglich ist, sämtliche Elemente des Komplexes so in zwei nicht leere, elementfremde Mengen aufzuteilen, daß nach den Angehörigkeitsbeziehungen im Komplexe kein Element der einen Menge einem Element der anderen Menge angehört.

19. Hat ein zusammenhängender Streckenkomplex die Eigenschaft, daß der Umgebungskomplex jedes Punktelements eine Mannigfaltigkeit ist, so heißt der Streckenkomplex eine eindimensionale *Mannigfaltigkeit*, Streckenmannigfaltigkeit oder *Linie*. Die Punkte einer Linie, deren Umgebungskomplex sphärisch — d. h. ein Punktepaar — ist, heißen Innen-

punkte; diejenigen, deren Umgebungskomplex eine Elementarmannigfaltigkeit — d. h. ein Punkt — ist, heißen Randpunkte der Linie.

Eine Linie heißt *unberandet*, wenn sie nur Innenpunkte enthält, andernfalls heißt sie *berandet*.

Die Begriffe *zusammenhängend*, *Mannigfaltigkeit*, *berandet* und *unberandet* sind invariant.

20. Die einfachste unberandete Linie wird gebildet durch zwei Strecken mit gemeinsamem Punktepaar:

$$\{a_1^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}_1^1);\ a_2^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}_2^1)\},$$

wobei

$$\Sigma^0 = \{a_1^0 = \mathfrak{a}_1^0;\ a_2^0 = \mathfrak{a}_2^0\}.$$

Jede unberandete Linie ist der oben angeschriebenen verwandt. Wir nennen sie eine eindimensionale *sphärische Mannigfaltigkeit* oder *Kreislinie* und bezeichnen sie mit Σ^1.

21. Die einfachste berandete Linie ist die Strecke

$$\{a^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}^1)\},$$

wobei

$$\Sigma^0 = \{a_1^0 = \mathfrak{a}_1^0;\ a_2^0 = \mathfrak{a}_2^0\}.$$

Jede berandete Linie ist einer Strecke verwandt. Sie heißt eindimensionale *Elementarmannigfaltigkeit* oder *Elementarlinie* und wird mit E^1 bezeichnet. Die Randpunkte einer Elementarlinie bilden ein Punktepaar.

Es gibt also nur zwei Klassen von Linien, die unberandeten oder Kreislinien und die berandeten oder Elementarlinien. Die Überzahl von Bezeichnungen, die wir hier aufgestellt haben, rechtfertigt sich durch die Sachlage bei höherer Dimensionszahl.

22. Eine Mannigfaltigkeit heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sie entweder eine sphärische oder eine Elementarmannigfaltigkeit ist.

Diese Erklärung soll auch auf Punktmannigfaltigkeiten Anwendung finden.

23. Bezeichnet man auf einer Kreislinie Σ^1 ein beliebiges Punktepaar, so gibt es zwei verschiedene Teilmannigfaltigkeiten von Σ^1, deren jede von dem bezeichneten Punktepaar berandet wird, und deren Innenelemente[6]) zusammen mit dem Punktepaar gerade sämtliche Elemente der Σ^1 ausmachen. Wir sagen dafür: Jedes Punktepaar auf einer Σ^1 *zerlegt* die Σ^1.

Die beiden Teilmannigfaltigkeiten, in welche eine Kreislinie durch ein auf ihr liegendes Punktepaar zerlegt wird, sind Elementarlinien.

---

[6]) Unter *Innenelementen* werden sämtliche Streckenelemente sowie die Innenpunkte (19) verstanden.

§ 3.

Definition von Flächenkomplexen.

Wir knüpfen wieder an die Anschauung an. Man kann aus einzelnen Flächenstücken oder Polygonflächen durch Zusammensetzen Flächengebilde — auch geschlossene und mehrfach zusammenhängende — aufbauen. Um diesen Gedanken kombinatorisch zu fassen, definieren wir:

24. Eine dritte Art von Elementen sind die Elemente zweiter Dimension oder Flächenelemente, ihre Bezeichnung z. B. $\mathfrak{a}^2$.

Es sollen Zusammenfassungen von endlich vielen Elementen nullter, erster und zweiter Dimension betrachtet werden. Dabei soll zwischen Elementen verschiedener Dimension die gegenseitige Beziehung des Angehörens oder Nichtangehörens bestehen, derart, daß wenn ein Element $\mathfrak{a}^0$ einem Element $\mathfrak{a}^1$ und dieses $\mathfrak{a}^1$ einem Element $\mathfrak{a}^2$ angehört, dann auch jenes $\mathfrak{a}^0$ diesem $\mathfrak{a}^2$ angehört.

25. Um zu Komplexen zweiter Dimension zu kommen, wird der Begriff *Flächenstück* erklärt. Sei eine eindimensionale sphärische Mannigfaltigkeit — eine Kreislinie — Σ^1 gegeben. Zu dieser Kreislinie werde ein Flächenelement $\mathfrak{a}^2$ hinzugenommen mit der Bestimmung, daß zwischen diesem Flächenelement $\mathfrak{a}^2$ einerseits und jedem der Elemente der Kreislinie Σ^1 andererseits die gegenseitige Beziehung des Einanderangehörens gelten soll. Die so gebildete Elementzusammenfassung heißt eine zweidimensionale Zelle oder ein Flächenstück; wir schreiben dafür:

$$a^2 = (\Sigma^1, \mathfrak{a}^2).$$

26. Ein zweidimensionaler Komplex oder *Flächen*komplex ist eine Zusammenfassung von endlich vielen Elementen nullter, erster und zweiter Dimension, in welcher

a) jedes Flächenelement zusammen mit den ihm angehörenden Strecken- und Punktelementen genau ein Flächenstück bildet,

b) jedes Punktelement mindestens einem Streckenelement, jedes Streckenelement mindestens einem Flächenelement angehört.

27. Unter dem Rand eines Streckenelements oder eines Flächenelements in einem Flächenkomplex verstehen wir den Komplex aller Elemente niederer Dimension, die im Flächenkomplex dem Strecken- bzw. Flächenelement angehören.

28. Unter dem Umgebungskomplex eines Punktelements oder eines Streckenelements in bezug auf einen Flächenkomplex verstehen wir den Komplex, welcher entsteht, wenn man für jedes Element von höherer als nullter bzw. erster Dimension, das im Flächenkomplex dem betreffenden

Punkt- bzw. Streckenelement angehört, je ein Element setzt, dessen Dimensionszahl um 1 bzw. 2 niedriger ist, unter Beibehaltung der entsprechenden Angehörigkeitsbeziehungen [7]).

29. Mit Hilfe der Begriffe Rand und Umgebungskomplex lassen sich die Definitionseigenschaften eines Flächenkomplexes (26) so fassen:

a) Zu jedem Flächenelement gehört als Rand im Flächenkomplex eine Kreislinie.

b) Zu jedem Punktelement gehört als Umgebungskomplex in bezug auf den Flächenkomplex ein Streckenkomplex.

c) Jedes Streckenelement gehört im Flächenkomplex mindestens einem Punktelement oder einem Flächenelement an.

Aus diesen drei Eigenschaften folgt dann ohne weiteres, daß in einem Flächenkomplex jedes Streckenelement zum Rand ein Punktepaar und zum Umgebungskomplex einen Punktkomplex hat.

30. Denkt man sich aus einem Flächenkomplex P alle Flächenelemente entfernt, d. h. bildet man einen Streckenkomplex $\overline{P}$, dessen Elemente und ihre Angehörigkeitsbeziehungen mit den Elementen nullter und erster Dimension aus dem vorgelegten Flächenkomplex P und deren gegenseitigen Angehörigkeitsbeziehungen identisch sind — die so gebildete Elementzusammenfassung ist sicher ein Streckenkomplex —, so heiße dieser Streckenkomplex $\overline{P}$ das *Gerüst* des gegebenen Flächenkomplexes P.

31. Zwei Flächenkomplexe heißen gleich, wenn sie — gegebenenfalls nach Änderung der Bezeichnung ihrer Elemente — identisch sind.

§ 4.

Unterteilung eines Flächenkomplexes; der Hauptsatz über verwandte Komplexe; zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

Ein aus Polygonflächen zusammengesetztes Flächengebilde, wie es uns für die Aufstellung der im vorigen Paragraphen erklärten Begriffe zur Richtschnur diente, läßt sich auf zweierlei Weise abändern, ohne daß dabei der Zusammenhangscharakter des Gebildes selbst gestört wird: einmal kann man durch Einführung neuer Punkte die Eckenzahl einzelner Polygonflächen ändern, zum anderen kann man durch Ziehen neuer Kanten beliebige der Polygonflächen in Teilflächen gliedern. Demgemäß werden wir für unsere kombinatorisch definierten Flächenkomplexe die Operation

[7]) Dieser Definition liegt der durch die Anschauung gegebene Gedanke zugrunde, daß in einem (kontinuierlichen) Flächenkonglomerat die Umgebung eines Punktes (einer Kante) charakterisiert wird durch das Schnittgebilde mit einer um diesen Punkt (Kante) gelegten Kugelfläche (Kreislinie) von hinreichend kleinem Radius.

der Unterteilung zu erklären haben, und wir besprechen zunächst zwei verschiedene Arten von *elementaren* Unterteilungen.

32. Eine im Flächenkomplex enthaltene Strecke

$$a^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}^1),\ \Sigma^0 = \{a_1^0 = \mathfrak{a}_1^0;\ a_2^0 = \mathfrak{a}_2^0\}$$

werde transformiert nach der Vorschrift:

a) Einführung eines neuen Punktes

$$x^0 = \mathfrak{x}^0,$$

b) Ersatz des Streckenelements $\mathfrak{a}^1$ durch zwei Streckenelemente $\mathfrak{a}_1^1$ und $\mathfrak{a}_2^1$, die von den Punktepaaren

$$\Sigma_1^0 = (\mathfrak{a}_1^0, x^0) \quad \text{und} \quad \Sigma_2^0 = \{x^0, a_2^0\}$$

berandet die Strecken

$$a_1^1 = (\Sigma_1^0, \mathfrak{a}_1^1) \quad \text{und} \quad a_2^1 = (\Sigma_2^0, \mathfrak{a}_2^1)$$

bilden.

c) Alle Flächenelemente, die dem Streckenelement $\mathfrak{a}^1$ angehört haben, sollen nunmehr den beiden Streckenelementen $\mathfrak{a}_1^1$ und $\mathfrak{a}_2^1$ sowie dem Punktelement $\mathfrak{x}^0$ angehören.

Die hier beschriebene Operation heißt eine *elementare Unterteilung erster Ordnung* des Flächenkomplexes. Wir sagen wohl auch, die elementare Unterteilung erster Ordnung *bezieht sich* auf die Strecke a^1, *die Strecke a^1 wird durch den neuen Punkt x^0 unterteilt.*

33. Ein im Flächenkomplex enthaltenes Flächenstück

$$a^2 = (\Sigma^1, \mathfrak{a}^2)$$

werde transformiert nach folgender Vorschrift:

a) Wahl eines Punktepaares

$$\Sigma_x^0 = (x_1^0, x_2^0)$$

auf a^2; dieses Punktepaar Σ^0 zerlegt (nach § 2, 23) die Kreislinie Σ^1, welche den Rand von a^2 bildet, in zwei Elementarlinien E_1^1 und E_2^1.

b) Einführung der Strecke

$$x^1 = (\Sigma_x^0, \mathfrak{x}^1)$$

— mit dem neuen Streckenelement $\mathfrak{x}^1$ —, wobei die folgenden Kreislinien mit Σ_1^1 und Σ_2^1 bezeichnet werden mögen:

$$\Sigma_1^1 = \{E_1^1, x^1\} \quad \text{und} \quad \Sigma_2^1 = \{x^1, E_2^1\}.$$

c) Ersatz des Flächenelements $\mathfrak{a}^2$ durch zwei Flächenelemente $\mathfrak{a}_1^2$ und $\mathfrak{a}_2^2$, welche von Σ_1^1 bzw. Σ_2^1 berandet die Flächenstücke

$$a_1^2 = (\Sigma_1^1, \mathfrak{a}_1^2) \quad \text{und} \quad a_2^2 = (\Sigma_2^1, \mathfrak{a}_2^2)$$

bilden.

Die hier beschriebene Operation heißt eine *elementare Unterteilung zweiter Ordnung* eines Flächenkomplexes. Wir sagen wohl auch, das Flächenstück a^2 wird durch die neue Strecke $x^1 = (\Sigma_x^0, \mathfrak{x}^1)$ unterteilt.

34. Allgemein wird nun unter einer Unterteilung eines Flächenkomplexes P eine solche Abänderung des Flächenkomplexes verstanden, welche sich aus endlich vielen sukzessiven elementaren Unterteilungen zusammensetzen läßt. Jeder so aus P entstehende Komplex (sowie P selbst) heißt *unterteilter* oder *abgeleiteter* Komplex von P.

35. Zwei Flächenkomplexe heißen *verwandt*, wenn sie entweder gleich sind oder wenn es einen Komplex gibt, der aus jedem der beiden abgeleitet werden kann.

36. Hauptsatz über Unterteilungen: Werden aus einem Flächenkomplex P durch Unterteilung zwei verschiedene Komplexe Q und R abgeleitet, so gibt es zu Q und R einen gemeinsam abgeleiteten Komplex S.

Dieser Satz soll bewiesen werden durch Angabe eines Verfahrens, welches zu Q und R einen gemeinsam abgeleiteten Komplex S liefert.

37. Zunächst sollen gewisse Reihen sukzessiver elementarer Unterteilungen eines Flächenkomplexes zu je einem Operationsbegriff zusammengefaßt werden durch die Erklärung:

Unter einer *primitiven* Unterteilung eines Flächenkomplexes P wollen wir eine solche Unterteilung des Komplexes P verstehen, bei der in der Reihe der aufeinanderfolgenden elementaren Unterteilungen keine solche Strecke unterteilt wird, welche bei einer der Reihe angehörenden elementaren Unterteilung zweiter Ordnung neu eingeführt wird.

38. Ist ein Komplex Q durch eine primitive Unterteilung aus dem Flächenkomplex P abgeleitet unter Angabe der zu seiner Ableitung angewandten aufeinanderfolgenden elementaren Unterteilungen, so denken wir uns das Verfahren zu seiner Gewinnung für unsere Zwecke modifiziert, indem wir die einzelnen elementaren Unterteilungen wie folgt gewissermaßen umordnen und zu zwei Operationsschritten gruppieren. Da sich nämlich keine der elementaren Unterteilungen erster Ordnung auf eine solche Strecke beziehen soll, welche zu einer elementaren Unterteilung zweiter Ordnung neu eingeführt wird, so lassen sich in einem ersten Operationsschritt alle elementaren Unterteilungen erster Ordnung vorwegnehmen; in einem zweiten Operationsschritt sollen dann nur noch elementare Unterteilungen zweiter Ordnung folgen. Wir führen dies näher aus wie folgt:

I. Im *ersten Schritt* der primitiven Unterteilung werden die elementaren Unterteilungen erster Ordnung zusammengefaßt, wie sie in der Gesamtreihe der elementaren Unterteilungen vorkommen; sie beziehen sich

alle auf Strecken, die im Gerüst $\bar{P}$ des Flächenkomplexes P enthalten sind oder doch aus solchen in $\bar{P}$ enthaltenen Strecken entstehen. Der Komplex P^*, welcher durch diesen ersten Schritt der primitiven Unterteilung entsteht, läßt sich mithin kurz so beschreiben:

a) Das Gerüst $\bar{P}^*$ von P^* ist abgeleitet aus dem Gerüst $\bar{P}$ von P.

b) Die Flächenelemente von P^* sind identisch mit denen von P. Der Rand Σ^{*1} eines jeden Flächenelements in P^* ist abgeleitet aus dem Rand Σ^1 des entsprechenden Flächenelements in P.

Die Beschreibung des ersten Schrittes ist hier so gefaßt, daß wir auch von einem solchen sprechen können, wenn bei der primitiven Unterteilung gar keine elementare Unterteilung erster Ordnung auszuführen ist. Es ist dann eben $\bar{P}^* = \bar{P}$ und mithin $P^* = P$ zu setzen.

II. Im *zweiten Schritt* der primitiven Unterteilung sollen die elementaren Unterteilungen zweiter Ordnung folgen [8]). Um hierfür ebenfalls eine zusammenfassende Beschreibung aufstellen zu können, überlegen wir folgendes:

Wird ein Flächenstück a^2 durch eine neue Strecke unterteilt und bezieht sich etwa eine nachfolgende Unterteilung zweiter Ordnung auf ein anderes Flächenstück b^2, so kann die Reihenfolge dieser beiden elementaren Unterteilungen vertauscht werden.

Wird ein Flächenstück a^2 durch eine neue Strecke x^1 unterteilt und nachfolgend eines der beiden hierbei entstandenen Flächenstücke wiederum durch eine neue Strecke y^1 unterteilt (ohne daß vorher x^1 unterteilt worden ist, gemäß der Definition der primitiven Unterteilung!), so läßt sich von jedem der beiden Punktepaare Σ_x^0 und Σ_y^0, die x^1 bzw. y^1 beranden, aussagen, daß es ganz auf einer der beiden Elementarlinien liegt, in welche gerade das andere Punktepaar den Rand von a^2 zerlegt [9]). Dieser Sachverhalt soll ausgedrückt werden in den Worten: Die beiden Punktepaare Σ_x^0 und Σ_y^0 *kreuzen sich* auf dem Rand von a^2 *nicht*.

Man erkennt weiter, daß man zum Schluß genau den gleichen abgeleiteten Komplex erhält, wenn man erst das Flächenstück a^2 durch die Strecke $y^1 = (\Sigma_y^0, \mathfrak{y}^1)$ unterteilt und hierauf das eine der entstehenden Flächenstücke durch die Strecke $x^1 = (\Sigma_x^1, \mathfrak{x}^1)$ unterteilt. In diesem Sinne wollen wir schlechthin sagen, die Zelle a^2 werde durch die neuen Strecken x^1 und y^1 (mehrfach) unterteilt.

---

[8]) Infolge der Umordnung in der Reihenfolge der einzelnen elementaren Unterteilungen ist natürlich die Vorschrift für die einzelne elementare Unterteilung zweiter Ordnung insofern abzuändern, als anstelle des Randes Σ^1 des zu unterteilenden Flächenstücks dessen Ableitung Σ^{*1} zu setzen ist.

[9]) Daß gegebenenfalls Σ_x^0 und Σ_y^0 Elemente gemein haben, wird zugelassen.

Indem wir das Ergebnis dieser Überlegungen beliebig oft anwenden, können wir den *zweiten Schritt* der primitiven Unterteilung so beschreiben:

a) Auf beliebigen Flächenstücken des Komplexes P^* werden je beliebig viele Punktepaare bezeichnet, von denen je zwei auf demselben Flächenstücke liegende sich auf dem Rand dieses Flächenstückes nicht kreuzen.

b) Diese Flächenstücke werden durch neue Strecken, welche von den bezeichneten Punktepaaren berandet sind, unterteilt.

Damit entsteht aus P^* der Flächenkomplex Q. Enthält die primitive Unterteilung etwa gar keine elementare Unterteilung zweiter Ordnung, so ist $Q = P^*$ zu setzen.

39. Um den Beweis des Hauptsatzes (36) anzutreten, werde zunächst einmal angenommen, zwei verschiedene Flächenkomplexe Q und R seien durch primitive Unterteilung aus dem Flächenkomplex P abgeleitet. Wir wählen die Komplexbezeichnungen

$$P, P_{10}, P_{20} = Q$$

und

$$P, P_{01}, P_{02} = R,$$

wobei P_{10} und P_{01} je durch den ersten Schritt einer primitiven Unterteilung aus P, P_{20} und P_{02} je durch den zweiten Schritt aus P_{10} bzw. P_{01} gewonnen seien.

40. Aus der Vorschrift über den ersten Schritt einer primitiven Unterteilung folgt, daß die Gerüste $\overline{P}_{10}$ und $\overline{P}_{01}$ der beiden Komplexe P_{10} und P_{01} beide aus dem Gerüst $\overline{P}$ von P abgeleitet sind. Es gibt also (§ 2, 15) einen zu $\overline{P}_{10}$ und $\overline{P}_{01}$ gemeinsamen abgeleiteten Komplex $\overline{P}_{11}$. Man gewinnt daher einen gemeinsamen unterteilten Komplex P_{11} sowohl aus dem Flächenkomplex P_{10} als auch aus dem Flächenkomplex P_{01}, indem man das Gerüst $\overline{P}_{10}$ bzw. $\overline{P}_{01}$ durch $\overline{P}_{11}$ ersetzt unter Beibehaltung der Flächenelemente.

41. Aus P_{10} ist durch den zweiten Schritt einer primitiven Unterteilung — d. h. durch eine Reihe von elementaren Unterteilungen zweiter Ordnung — der Komplex P_{20} abgeleitet, während soeben aus P_{10} der Komplex P_{11} abgeleitet wurde durch ein Verfahren, das nur elementare Unterteilungen erster Ordnung umfaßt. Demnach erkennt man ohne weiteres, daß sich ein gemeinsamer abgeleiteter Komplex P_{21} gewinnen läßt sowohl aus P_{20} durch elementare Unterteilungen erster Ordnung als aus P_{11} durch solche zweiter Ordnung.

42. In derselben Weise läßt sich ein gemeinsamer abgeleiteter Komplex P_{12} sowohl aus P_{02} durch elementare Unterteilungen erster Ordnung als aus P_{11} durch solche zweiter Ordnung ableiten.

Nunmehr haben wir aus dem Komplex P_{11} zwei Komplexe P_{21} und P_{12} abgeleitet, beide durch ein Verfahren, das nur elementare Unterteilungen zweiter Ordnung umfaßt. Um hier eine Methode zu finden, wie man einen gemeinsamen abgeleiteten Komplex aus P_{21} wie aus P_{12} bilden kann, werde folgender Spezialfall betrachtet:

43. Sei ein Flächenkomplex T gegeben, der nur aus einem einzigen Flächenstück besteht:

$$T = \{a^2 = (\Sigma^1, \mathfrak{a}^2)\}.$$

Dieser Komplex T erfahre zwei verschiedene elementare Unterteilungen zweiter Ordnung. Einmal werde das Flächenstück a^2 unterteilt durch eine neue Strecke

$$x^1 = (\Sigma_x^0, \mathfrak{x}^1),$$

wodurch der Flächenkomplex

$$U = \{u_1^2 = (\Sigma_{u_1}^1, \mathfrak{u}_1^2);\ u_2^2 = (\Sigma_{u_2}^1, \mathfrak{u}_2^2)\}$$

entsteht. Das andere Mal werde a^2 unterteilt durch eine neue Strecke

$$y^1 = (\Sigma_y^0, \mathfrak{y}^1),$$

womit man den Flächenkomplex

$$V = \{v_1^2 = (\Sigma_{v_1}^1, \mathfrak{v}_1^2);\ v_2^2 = (\Sigma_{v_2}^1, \mathfrak{v}_2^2)\}$$

gewinnt.

Man denke sich zum Zwecke einer anschaulichen Bezeichnung im Komplex U die Strecke $x^1 = (\Sigma_x^0, \mathfrak{x}^1)$ und in den Komplexen T und V das Punktepaar Σ_x^0 blau, ferner im Komplex V die Strecke $y^1 = (\Sigma_y^0, \mathfrak{y}^1)$ und in den Komplexen T und U das Punktepaar Σ_y^0 gelb markiert.

44. Wenn sich auf der Kreislinie Σ_1 das blaue Punktepaar Σ_x^0 und das gelbe Punktepaar Σ_y^0 nicht kreuzen (vgl. 38, 11), so läßt sich ein und derselbe abgeleitete Flächenkomplex W bilden aus dem Komplex U durch elementare Unterteilung zweiter Ordnung eines seiner Flächenstücke mittels Einführung der gelben Strecke

$$y = (\Sigma_y^0, \mathfrak{y}^1)$$

und entsprechend aus dem Komplex V durch Unterteilung zweiter Ordnung eines seiner Flächenstücke mittels Einführung der blauen Strecke

$$x^1 = (\Sigma_x^1, \mathfrak{x}^1).$$

45. Wenn sich hingegen das blaue Punktepaar Σ_x^0 und das gelbe Punktepaar Σ_y^0 auf der Kreislinie Σ^1 kreuzen, verfahre man wie folgt:

I. Aus den Komplexen U und V sollen zunächst je durch eine elementare Unterteilung erster Ordnung die Komplexe U^* und V^* abgeleitet werden. Es werde nämlich im Komplex U die blaue Strecke

$$x^1 = (\Sigma_x^0, \mathfrak{x}^1)$$

unterteilt durch Einführung eines neuen — grünen — Punktes

$$z^0 = \mathfrak{z}^0.$$

Dabei entstehen aus der Strecke x^1 zwei Strecken x_1^1 und x_2^1, deren Streckenelemente wieder blau sein sollen. Entsprechend werde im Komplex V die gelbe Strecke

$$y^1 = (\Sigma_y^0, \mathfrak{y}^1)$$

unterteilt durch Einführung eines — grünen — Punktes

$$z^0 = \mathfrak{z}^0.$$

Dabei entstehen aus y^1 zwei Strecken y_1^1 und y_2^1, deren Streckenelemente wieder gelb sein mögen.

II. Alsdann enthält der Komplex U^* auf jedem seiner beiden Flächenstücke genau eines jener Punktepaare, welche die gelben Strecken in $V^* y_1^1$ bzw. y_2^1 beranden, nämlich U^* enthält auf jedem seiner Flächenstücke einen der gelben Punkte des Punktepaares Σ_y^0 und den grünen Punkt z^0. Der Komplex U^* werde durch zwei elementare Unterteilungen zweiter Ordnung abgeleitet, indem seine beiden Flächenstücke mittels Einführung der — gelben — Strecken y_1^1 und y_2^1 unterteilt werden. Somit entsteht ein Flächenkomplex W.

Entsprechend enthält aber auch der Komplex V^* auf jedem seiner Flächenstücke je eines jener Punktepaare, welche die blauen Strecken in $U^* x_1^1$ und x_2^1 beranden. Es werde demnach auch der Komplex V^* durch zwei elementare Unterteilungen zweiter Ordnung abgeleitet, indem seine beiden Flächenstücke mittels der — blauen — Strecken x_1^1 und x_2^1 unterteilt werden. Damit entsteht genau der gleiche Flächenkomplex W.

Zusammenfassend konnte also ein und derselbe abgeleitete Komplex W sowohl aus U wie aus V gewonnen werden durch eine elementare Unterteilung erster Ordnung und darauffolgende zwei elementare Unterteilungen zweiter Ordnung.

46. Ganz entsprechend wie in dem soeben behandelten Spezialfall (43) soll im allgemeinen Fall vorgegangen werden. Aus dem Flächenkomplex P_{11} wurden je durch eine Reihe von elementaren Unterteilungen zweiter Ordnung die Komplexe P_{21} und P_{12} abgeleitet. Die Strecken, welche beim Übergang von dem Komplex P_{11} zum Komplex P_{21} (41) neu eingeführt werden, bilden zusammen einen Streckenkomplex X. Dieser Komplex X möge auf P_{21}, sein Gerüst $\overline{X}$ auf P_{11} und auf P_{12} *blau* markiert sein. Die Strecken, welche beim Übergang von dem Komplex P_{11} zum Komplex P_{12} (42) neu eingeführt werden, bilden zusammen einen Streckenkomplex Y. Der Streckenkomplex Y möge auf P_{12}, sein Gerüst $\overline{Y}$ auf P_{11} und auf P_{21} gelb markiert sein.

47. I. Im allgemeinen wird es vorkommen, daß auf dem Rand gewisser Flächenstücke von P_{11} sich blaue und gelbe Punktepaare kreuzen. Dann sollen sowohl am Komplex P_{21} wie am Komplex P_{12} Unterteilungen erster Ordnung ausgeführt werden, welche durch folgende Teilungen von Strecken des blauen Komplexes X bzw. des gelben Komplexes Y bewirkt werden: Jedesmal, wenn ein blaues und ein gelbes Punktepaar sich auf dem Rand von ein und derselben Flächenzelle von P_{11} kreuzen, soll sowohl im Komplex P_{21} die betreffende blaue als im Komplex P_{12} die betreffende gelbe Strecke durch einen neuen — *grünen* — Punkt unterteilt werden. Wenn sich auf dem Rand eines Flächenstückes a^2 von P_{11} etwa ein blaues Punktepaar $\{b_1^0, b_2^0\}$ und mehrere gelbe kreuzen, so kann man für die entsprechende blaue Strecke b^1 von P_{21} auf folgende Weise eine geeignete Unterteilung durch grüne Punkte festlegen: Bei der Ableitung des Komplexes P_{12} aus P_{11} wird a^2 durch mehrere gelbe Strecken g_j^1 unterteilt, diese Unterteilungen denke man sich nacheinander ausgeführt. Die erste gelbe Strecke g_i^1 unterteilt a^2 in 2 Flächenstücke a_1^2, a_2^2 (b_i^0 auf a_i^2 liegend); dementsprechend soll auch b^1 von P_{21} durch einen grünen Punkt in 2 Strecken b_1^1, b_2^1 unterteilt werden (b_i^0 auf b_i^1 liegend). Hierauf unterteilt g_2^1 eines der beiden Flächenstücke etwa a_h^2 wieder in 2 Flächenstücke; dementsprechend soll die entsprechende blaue Strecke b_h^1 durch einen grünen Punkt unterteilt werden, wobei wieder die Teilstrecken von b_h^1 den Teilflächenstücken von a_h^2 analog zuzuweisen sind. Bei jeder weiteren g_j^1 fahre man auch mit der Einführung grüner Punkte in gleicher Weise fort. Analog ist, wenn sich auf dem Rand eines Flächenstücks von P_{11} ein gelbes und mehrere blaue Punktepaare kreuzen, die betreffende gelbe Strecke durch mehrere grüne Punkte zu unterteilen.

Die Flächenkomplexe, welche so je durch eine Reihe von elementaren Unterteilungen erster Ordnung aus P_{21} bzw. P_{12} hervorgehen, werden mit P_{21}^* und P_{12}^* bezeichnet; die auf ihnen liegenden Streckenkomplexe, welche aus X bzw. Y entstehen, nennen wir X^* und Y^*.

II. Der Flächenkomplex P_{21}^* enthält nun außer dem blauen Streckenkomplex X^* auch das gelbe Gerüst $\bar{Y}^*$ des Streckenkomplexes Y^*.[10]) Jedes Punktepaar, das in Y^* eine Strecke berandet, gehört zu genau einem Flächenstück von P_{21}^*, und wenn mehrere solche Punktepaare zu ein und demselben Flächenstück von P_{21}^* gehören, so kreuzen sie sich auf seinem Rande nicht. Demnach ist es möglich, an P_{21}^* eine Reihe von elementaren Unterteilungen zweiter Ordnung auszuführen, indem man Flächenstücke von P_{21}^* unterteilt durch Einführung gelber Strecken, deren Randpunktepaare

[10]) Die *grünen* Elemente sind sowohl bei den *blauen* als auch bei den *gelben* Elementen mitzurechnen.

die auf jenen Flächenstücken liegenden gelben Punktepaare sind; die Gesamtheit der so eingeführten gelben Strecken ist dann eben gleich Y^*. Der entstehende Flächenkomplex sei P_{22}.

Ganz entsprechend verhält es sich mit P_{12}^*. Auf dem Flächenkomplex P_{12}^* liegt schon das Gerüst X^* des blauen Streckenkomplexes X^*. Es werde an P_{12}^* eine Reihe von elementaren Unterteilungen zweiter Ordnung vorgenommen, indem Flächenstücke von P_{12}^* unterteilt werden durch blaue Strecken, deren Gesamtheit gleich X^* ist. Es entsteht so der gleiche Flächenkomplex P_{22} wie oben. Wir setzen

$$P_{22} = S.$$

48. Wenn wir das Gesamtergebnis zusammenfassen wollen, so ergibt sich:

Aus einem Flächenkomplex P waren je durch eine primitive Unterteilung die beiden Flächenkomplexe Q und R abgeleitet (39). Wir konnten sowohl aus Q wie aus R einen gemeinsamen unterteilten Komplex S ableiten und zwar, wie nachträglich erkannt wird, je durch eine primitive Unterteilung. Es lassen sich nämlich die beiden Vorschriften, nach welchen aus dem Komplex $Q = P_{20}$ der Komplex P_{21} (41) und dann aus P_{21} der Komplex P_{21}^* (47, I) entstanden sind — da sie nur elementare Unterteilungen erster Ordnung vorschreiben —, zusammengefaßt als erster Schritt, und die Vorschrift, nach welcher aus dem Komplex P_{21} der Komplex $P_{22} = S$ gewonnen wurde (47, II), als zweiter Schritt einer primitiven Unterteilung auffassen. Ebenso ist die Ableitung des Komplexes P_{12} aus $R = P_{02}$ (42) und darnach des Komplexes P_{12}^* aus P_{12} (47, I) zusammen als erster Schritt und die Ableitung von $P_{22} = S$ aus dem Komplex P_{12}^* als zweiter Schritt einer primitiven Unterteilung zu deuten.

49. Nach diesem Ergebnis (48) erledigt sich der Beweis des Hauptsatzes über Unterteilungen (36) im allgemeinsten Fall ohne weiteres. Sind nämlich aus einem Flächenkomplex P zwei verschiedene Komplexe Q und R abgeleitet, so mögen die Unterteilungen, durch welche diese Komplexe Q und R aus dem Komplex P gewonnen werden, je in eine Reihe von primitiven Unterteilungen zerlegt werden. Man erhält so die Komplexreihen

$$P, P_1, P_2, \ldots, P_h = Q$$

und

$$P, P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(h)} = R,$$

von der Eigenschaft, daß jeder einem anderen nachfolgende Komplex aus dem vorhergehenden durch eine primitive Unterteilung abgeleitet ist.

Ist nun $P^{(i)}$ ein Komplex der zweiten Reihe und

$$P^{(i)}, P_1^{(i)}, P_2^{(i)}, \ldots, P_h^{(i)}$$

eine Komplexreihe von derselben Eigenschaft, und überdies der letzte Komplex $P_h^{(i)}$ aus dem Komplex $P_h = Q$ abgeleitet, so bilde man weiter die Reihe

$$P^{(i+1)}, P_1^{(i+1)}, P_2^{(i+1)}, \ldots, P_h^{(i+1)},$$

wobei immer der Komplex $P_j^{(i+1)}$, $j = 1, 2, \ldots, h$, sowohl aus $P_j^{(i)}$ als aus $P_{j-1}^{(i+1)}$ durch eine primitive Unterteilung zu gewinnen ist (48). Man erhält schließlich die Reihe

$$P^{(k)}, P_1^{(k)}, \ldots, P_h^{(k)} = S$$

und der Komplex $P_h^{(k)} = S$ ist sowohl aus Q wie aus R abgeleitet. Damit ist der Hauptsatz (36) vollständig bewiesen.

50. Aus dem Hauptsatz (36) folgt der Satz (vgl. 17), daß zwei Flächenkomplexe, die einem dritten Komplex verwandt sind, unter sich verwandt sind, und damit die Möglichkeit der Aufstellung von Verwandtschaftsklassen.

51. Ein Flächenkomplex heißt zusammenhängend, wenn es nicht möglich ist, seine sämtlichen Elemente so in zwei nicht leere, elementfremde Mengen aufzuteilen, daß nach den Angehörigkeitsbeziehungen im Komplexe kein Element der einen Menge einem Element der anderen Menge angehört.

52. Hat ein zusammenhängender Flächenkomplex die Eigenschaft, daß der Umgebungskomplex jeden Punktelements eine (einfach zusammenhängende) Streckenmannigfaltigkeit — Kreislinie oder Elementarlinie — ist, so heißt der Flächenkomplex eine zweidimensionale *Mannigfaltigkeit*, Flächenmannigfaltigkeit oder *Fläche*.

Der Umgebungskomplex jedes Streckenelements einer Fläche ist eine (einfach zusammenhängende) Punktmannigfaltigkeit — ein Punktepaar oder ein Punkt —.

Die Punktelemente und Streckenelemente einer Fläche, deren Umgebungskomplex eine sphärische Mannigfaltigkeit ist, ferner alle Flächenelemente einer Fläche, heißen *Innenelemente* der Fläche. Die Punktelemente und Streckenelemente einer Fläche, deren Umgebungskomplex eine Elementarmannigfaltigkeit ist, heißen Randelemente der Fläche.

53. Enthält eine Fläche nur Innenelemente, so heißt sie unberandet, andernfalls heißt sie berandet. Der Komplex sämtlicher Randelemente einer berandeten Fläche heißt die *Berandung* der Fläche. Die Berandung einer berandeten Fläche besteht stets aus einer oder mehreren Kreislinien. Da nämlich zu jedem Randpunkt der Fläche als Umgebungskomplex in bezug auf die Fläche eine Elementarlinie gehört, deren Randpunktepaar gewiß zwei Randstreckenelementen der Fläche entspricht, so gehört zu demselben Randpunkt der Fläche als Umgebungskomplex in bezug auf

die Berandung der Fläche eben jenes Punktepaar. Die Berandung der Fläche hat also den Charakter von unberandeten Linien (19), das sind aber Kreise (20).

54. Die einfachste unberandete Fläche ist die folgende:

$$\begin{aligned} &\{a_1^0 = \mathfrak{a}_1^0;\ a_2^0 = \mathfrak{a}_2^0; \\ &a_1^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}_1^1),\ a_2^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}_2^1), \quad \text{wobei} \quad \Sigma^0 = \{a_1^0, a_2^0\}, \\ &a_1^2 = (\Sigma^1, \mathfrak{a}_1^2),\ a_2^2 = (\Sigma^1, \mathfrak{a}_2^2), \quad \text{wobei} \quad \Sigma^1 = \{a_1^1, a_2^1\}\}. \end{aligned}$$

Jede Fläche, die der angeschriebenen verwandt ist, heißt eine zweidimensionale *sphärische Mannigfaltigkeit, sphärische Fläche* oder *Kugelfläche*; wir bezeichnen sie mit Σ^2.

55. Die einfachste berandete Fläche ist folgende:

$$\begin{aligned} &\{a_1^0 = \mathfrak{a}_1^0;\ a_2^0 = \mathfrak{a}_2^0; \\ &a_1^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}_1^1),\ a_2^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}_2^1), \quad \text{wobei} \quad \Sigma^0 = \{a_1^0, a_2^0\}; \\ &a^2 = (\Sigma^1, \mathfrak{a}^2), \quad \text{wobei} \quad \Sigma^1 = \{a_1^1, a_2^1\}\}. \end{aligned}$$

Jede Fläche, die der angeschriebenen verwandt ist, heißt eine zweidimensionale *Elementarmannigfaltigkeit* oder *Elementarfläche*; wir bezeichnen sie mit E^2. Der Rand einer jeden Elementarfläche ist *eine Kreislinie.*

56. Eine Fläche heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sie entweder eine Kugelfläche oder eine Elementarfläche ist. Nicht jede Fläche ist einfach zusammenhängend.

Es gelten die Sätze:

57. a) Bezeichnet man auf einer Kugelfläche Σ^2 eine beliebige Kreislinie Σ^1, so gibt es zwei verschiedene Teilmannigfaltigkeiten von Σ^2, deren jede von Σ^1 berandet ist und deren Innenelemente zusammen mit den Elementen von Σ^1 gerade die sämtlichen Elemente der Kugelfläche Σ^2 ausmachen. Wir sagen dafür, jede Kreislinie Σ^1 auf einer Kugelfläche Σ^2 „zerlegt" die Kugelfläche Σ^2.

b) Eine Kugelfläche Σ^2 wird durch jede auf ihr liegende Kreislinie Σ^1 in zwei Elementarflächen zerlegt[11]).

---

[11]) Ein Beweis dieses Doppelsatzes läßt sich gestützt auf die (kombinatorisch durchführbare) Reduktion orientierbarer 2-dim. Mannigfaltigkeiten auf Normalformen etwa mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes (vgl. Enc. III AB 3, Nr. 3, S. 195) $N = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p - r$ erbringen: für Σ^2 ist $p = 0$, $r = 0$, $N = 2$; bei einer Zerschneidung längs einer Σ^1 wird jedes Element (Punkt oder Strecke) von Σ^1 durch zwei ersetzt, hierbei N nicht geändert. Für den entstehenden Flächenkomplex K ist also wieder $2 = N = \Sigma(2 - 2p_i - r_i)$ — die Summe erstreckt über $m\,(\leqq 2)$ Teile, in die K zerfällt. Aus dieser Gleichung für N folgt wegen $\Sigma r_i > 0$, daß $m > 1$, also $= 2$ und $p_1 = p_2 = 0$, $r_1 = r_2 = 1$ ist.

58. Jede Kreislinie Σ^1 auf einer Elementarfläche E^2 ist Randlinie einer Elementarfläche, die Teilfläche der E^2 ist.

§ 5.

Definition von n-dimensionalen Komplexen; ihre Unterteilung; n-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Aus dem bisher Entwickelten erkennt man schon, wie man zu Komplexen beliebig hoher Dimension aufsteigen kann.

59. Wir nehmen an, es seien die Elemente nullter, erster, ..., $(n-1)$-ter Dimension bereits eingeführt. Aus ihnen könnnen $(n-1)$-dimensionale Komplexe gebildet werden. Ferner soll bekannt sein, wie man aus einem $(n-1)$-dimensionalen Komplex durch Unterteilung einen abgeleiteten $(n-1)$-dimensionalen Komplex bilden kann. Insbesondere sollen aber auch zwei Klassen von einfach zusammenhängenden $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert sein, nämlich die sphärische Mannigfaltigkeit Σ^{n-1} und die Elementarmannigfaltigkeit E^{n-1}.

60. Eine weitere Art von Elementen sind die Elemente n-ter Dimension; sie sollen mit kleinen deutschen Buchstaben und oberem Index n bezeichnet werden, z. B. $\mathfrak{a}^n$.

61. Aus endlich vielen Elementen nullter bis n-ter Dimension lassen sich n-dimensionale Komplexe zusammensetzen auf Grund der gegenseitigen Beziehung des Einanderangehörens oder Nichtangehörens von Elementen verschiedener Dimension. Die Beziehung des Angehörens soll transitiv sein: gehören die Elemente $\mathfrak{a}^m$ und $\mathfrak{a}^p\,(m \succ p)$ sowie $\mathfrak{a}^p$ und $\mathfrak{a}^q\,(p > q)$ einander au, so sollen auch $\mathfrak{a}^m$ und $\mathfrak{a}^q$ einander angehören.

Weitere den Begriff des n-dimensionalen Komplexes noch beschränkende Eigenschaften sollen später (64) formuliert werden.

62. Unter dem Rand eines Elements m-ter Dimension $(m = 1, 2, \ldots, n)$ in einem n-dimensionalen Komplex wird die Zusammenfassung aller Elemente von niederer als der m-ten Dimension verstanden, die im n-dimensionalen Komplex jenem Element m-ter Dimension angehören, mit ihren gegenseitigen Angehörigkeitsbeziehungen.

63. Unter dem Umgebungskomplex eines Elements m-ter Dimension $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$ in bezug auf einen n-dimensionalen Komplex wird eine Zusammenfassung von Elementen nullter bis $(n-m-1)$-ter Dimension verstanden, welche dadurch entsteht, daß man jedem Element ν-ter Dimension $(n \geqq \nu \succ m)$, welches im n-dimensionalen Komplex jenem Element m-ter Dimension angehört, ein Element $(\nu - m - 1)$-ter Dimension ein-eindeutig zuordnet und für diese Bildelemente die Angehörigkeitsbeziehungen der entsprechenden Originalelemente gelten läßt.

64. Folgende Eigenschaften sind in die Definition des Begriffs *n-dimensionaler Komplex* mitaufzunehmen:

a) Zu jedem Element n-ter Dimension gehört als Rand im n-dimensionalen Komplex eine $(n-1)$-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit,

b) zu jedem Element nullter Dimension gehört als Umgebungskomplex in bezug auf den n-dimensionalen Komplex ein $(n-1)$-dimensionaler Komplex,

c) jedes Element ν-ter Dimension, $0 \leqslant \nu < n$, gehört im n-dimensionalen Komplex mindestens einem Element nullter oder n-ter Dimension an.

65. Aus diesen Definitionseigenschaften entnimmt man (durch Schluß von $n-1$ auf n) die weiteren Eigenschaften:

a) Zu jedem Element m-ter Dimension, $m > 0$, gehört als Rand im n-dimensionalen Komplex eine $(m-1)$-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit,

b) zu jedem Element m-ter Dimension, $m \leqslant n$, gehört als Umgebungskomplex in bezug auf den n-dimensionalen Komplex ein $(n-m-1)$-dimensionaler Komplex.

66. Ein Komplex P_1 heißt Teilkomplex eines Komplexes P, wenn sämtliche Elemente von P_1 und ihre Angehörigkeitsbeziehungen mit Elementen von P und deren gegenseitigen Angehörigkeitsbeziehungen identisch sind. Wir sagen auch, der Komplex P enthalte den Komplex P_1, oder, wenn etwa P_1 von niederer Dimension als P selbst ist, sagen wir, P_1 liege auf P.

67. Die einfachsten n-dimensionalen Teilkomplexe eines n-dimensionalen Komplexes sind die „n-dimensionalen Zellen“: Eine n-dimensionale Zelle besteht aus einem Element n-ter Dimension $\mathfrak{a}^n$ und einer $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit Σ^{n-1} als Rand. Wir schreiben eine solche Zelle:

$$a^n = (\Sigma^{n-1}, \mathfrak{a}^n).$$

68. Den $(n-1)$-dimensionalen Komplex $\bar{P}$, der in allen seinen Elementen und Angehörigkeitsbeziehungen mit sämtlichen Elementen nullter bis $(n-1)$-ter Dimension eines n-dimensionalen Komplexes P und deren gegenseitigen Angehörigkeitsbeziehungen identisch ist, nennen wir das *Gerüst* des Komplexes P.

69. Zwei Komplexe heißen gleich, wenn sie — gegebenenfalls nach Änderung der Bezeichnung ihrer Elemente — identisch sind.

70. Unter einer Unterteilung eines n-dimensionalen Komplexes P versteht man eine solche Abänderung des Komplexes P, die durch endlich viele sukzessive elementare Unterteilungen bewirkt wird. Diese elemen-

taren Unterteilungen sollen sogleich erklärt werden. Jeder durch Unterteilung von P entstehende Komplex (sowie P selbst) heißt ein aus P unterteilter oder abgeleiteter Komplex; desgleichen jeder einem solchen Komplexe gleiche (69) Komplex.

71. Eine elementare Unterteilung m-ter Ordnung, $m = 1, 2, \ldots, n-1$, eines n-dimensionalen Komplexes P erfolgt nach folgender Vorschrift:

a) Eine auf dem Komplex P liegende m-dimensionale Zelle, $1 \leqq m < n$, wird unterteilt nach der Vorschrift für die elementare Unterteilung m-ter Ordnung eines m-dimensionalen Komplexes (vgl. für $m = 1$ Nr. 12, für $m = 2$ Nr. 33).

b) Sämtliche Elemente von höherer als m-ter Dimension, welche im Komplex P dem Element m-ter Dimension angehört haben, gehören jetzt den beiden Elementen m-ter Dimension und dem neuen Element $(m-1)$-ter Dimension an.

Wir werden gewöhnlich, wenn von einer elementaren Unterteilung m-ter Ordnung eines n-dimensionalen Komplexes gesprochen wird, nur die Unterteilung der in Frage kommenden m-dimensionalen Zelle beschreiben und den andern Teil (b) der obigen Vorschrift als selbstverständlich unerwähnt lassen.

72. Eine elementare Unterteilung n-ter Ordnung eines n-dimensionalen Komplexes P besteht in der Transformation einer n-dimensionalen Zelle des Komplexes

$$a^n = (\Sigma^{n-1}, \mathfrak{a}^n)$$

nach der Vorschrift:

a) Auf der Zelle a^n wird eine solche $(n-2)$-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit Σ^{n-2} bezeichnet, welche den Rand Σ^{n-1} der Zelle a^n in zwei Elementarmannigfaltigkeiten E_1^{n-1} und E_2^{n-1} zerlegt[12]).

b) Es wird die $(n-1)$-dimensionale Zelle

$$x^{n-1} = (\Sigma^{n-2}, \mathfrak{x}^{n-1})$$

mit einem neuen Element $\mathfrak{x}^{n-1}$ eingeführt. Dabei mögen die beiden folgenden $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeiten mit Σ_1^{n-1} bzw. Σ_2^{n-1} bezeichnet werden:

$$\Sigma_1^{n-1} = \{E_1^{n-1}, x^{n-1}\}, \qquad \Sigma_2^{n-1} = \{x^{n-1}, E_2^{n-1}\}.$$

[12]) Daß Σ^{n-1} durch *jede* auf ihr liegende Σ^{n-2} in zwei Elementarmannigfaltigkeiten zerlegt wird, bildet den Inhalt eines allgemeinen Satzes, vgl. Nr. 93 u. Anm. 4. Hier wird, um jenen Satz nicht vorauszuszusetzen, diese Eigenschaft der Σ^{n-2} ausdrücklich gefordert.

c) Das Element n-ter Dimension $\mathfrak{a}^n$ wird ersetzt durch zwei Elemente $\mathfrak{a}_1^n$ und $\mathfrak{a}_2^n$, welche von Σ_1^{n-1} bzw. Σ_2^{n-1} berandet die n-dimensionalen Zellen

$$a_1^n = (\Sigma_1^{n-1}, \mathfrak{a}_1^n)$$

und

$$a_2^n = (\Sigma_2^{n-1}, \mathfrak{a}_2^n)$$

bilden.

Wir sagen für diese Operation auch kurz: a^n wird durch eine neue Zelle $x^{n-1} = (\Sigma^{n-2}, \mathfrak{x}^{n-1})$ unterteilt.

73. Zwei Komplexe heißen *verwandt*, wenn es einen Komplex gibt, der aus jedem der beiden abgeleitet werden kann.

Es erhebt sich wieder die Frage, ob dieser Begriff der Verwandtschaft zur Aufstellung von Klassen untereinander verwandter Komplexe dienen kann. Diese Frage verlangt eine Untersuchung über die Verallgemeinerung des für ein und zwei Dimensionen aufgestellten Hauptsatzes über Unterteilungen (§§ 2, 4).

Um diese Untersuchung für den Augenblick zu vermeiden, soll hier der Begriff der *Verwandtschaft im weiteren Sinne* eingeführt werden.

74. *Verwandt im weiteren Sinne* nennen wir zwei Komplexe Q und R, wenn man eine Q und R enthaltende Reihe von Komplexen angeben kann, deren je zwei aufeinanderfolgende verwandt (im bisherigen Sinne) sind[13]). Dieser Begriff der Verwandtschaft im weiteren Sinne ist offenbar Klassen bildend (transitiv). Er umfaßt auch den Begriff der eigentlichen Verwandtschaft.

75. Ein Komplex heißt *zusammenhängend*, wenn es nicht möglich ist, seine sämtlichen Elemente so in zwei nicht leere, elementfremde Mengen aufzuteilen, daß nach den Angehörigkeitsbeziehungen der Elemente im Komplex kein Element der einen Menge einem Element der andern Menge angehört.

76. Hat ein n-dimensionaler Komplex die Eigenschaft, daß zu jedem seiner Punktelemente als Umgebungskomplex in bezug auf den n-dimensionalen Komplex eine $(n-1)$-dimensionale einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit gehört, so heißt der Komplex eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zu jedem Element m-ter Dimension, $m < n$, einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit gehört dann als Umgebungskomplex eine $(n-m-1)$-dimensionale einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Diejenigen Elemente m-ter Dimension, $m < n$, einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, deren Umgebungskomplex eine sphärische Mannigfaltigkeit

[13]) Vgl. Tietze a. a O. § 19, S. 106.

ist, sowie ihre sämtlichen Elemente n-ter Dimension heißen *Innenelemente* der Mannigfaltigkeit. Diejenigen Elemente m-ter Dimension, $m < n$, einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, deren Umgehungskomplex eine Elementarmannigfaltigkeit ist, heißen *Randelemente* der Mannigfaltigkeit.

Besitzt eine Mannigfaltigkeit nur Innenelemente, so heißt sie unberandet; andernfalls heißt sie berandet. Der $(n-1)$-dimensionale Komplex der Randelemente einer berandeten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit heißt deren *Berandung*. Die Berandung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit besteht aus einer oder mehreren $(n-1)$-dimensionalen unberandeten Mannigfaltigkeiten. Der Umgebungskomplex eines Randpunktes einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit *in bezug auf deren Berandung* ist nämlich gerade gleich dem Rand derjenigen $(n-1)$-dimensionalen Elementarmannigfaltigkeit, welche zu jenem Punkt als Umgebungskomplex *in bezug auf die gesamte n-dimensionale Mannigfaltigkeit* gehört, und ist daher eine $(n-2)$-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit. Das heißt aber: die Berandung der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist vom Charakter $(n-1)$-dimensionaler unberandeter Mannigfaltigkeiten.

78. Die Begriffe *zusammenhängend*, *Mannigfaltigkeit*, *berandet* und *unberandet* sind invariant gegenüber der Operation der Unterteilung und sind mithin Eigenschaften von Verwandtschaftsklassen im weiteren Sinne (74).

79. Die einfachste n-dimensionale unberandete Mannigfaltigkeit ist die folgende:

$$\begin{aligned}
&\{a_1^0 = \mathfrak{a}_1^0;\ a_2^0 = \mathfrak{a}_2^0;\\
&\quad a_1^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}_1^1),\ a_2^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}_2^1), \quad \text{wobei} \quad \Sigma^0 = \{a_1^0, a_2^0\};\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_1^{n-1} = (\Sigma^{n-2}, \mathfrak{a}_1^{n-1}),\ a_2^{n-1} = (\Sigma^{n-2}, \mathfrak{a}_2^{n-1}), \quad \text{wobei} \quad \Sigma^{n-2} = \{a_1^{n-2}, a_2^{n-2}\};\\
&\quad a_1^n = (\Sigma^{n-1}, \mathfrak{a}_1^n),\ a_2^n = (\Sigma^{n-1}, a_2^n), \quad \text{wobei} \quad \Sigma^{n-1} = \{a_1^{n-1}, a_2^{n-1}\}\}.
\end{aligned}$$

Jede Mannigfaltigkeit, die der angeschriebenen verwandt (im weiteren Sinne) ist, heißt eine n-dimensionale *sphärische Mannigfaltigkeit*; in Zeichen: Σ^n.

80. Die einfachste n-dimensionale berandete Mannigfaltigkeit ist folgende n-dimensionale Zelle:

$$\begin{aligned}
&\{a_1^0 = \mathfrak{a}_1^0;\ a_2^0 = \mathfrak{a}_2^0;\\
&\quad a_1^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}_1^1),\ a_2^1 = (\Sigma^0, \mathfrak{a}_2^1), \quad \text{wobei} \quad \Sigma^0 = \{a_1^0, a_2^0\};\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_1^{n-1} = (\Sigma^{n-2}, \mathfrak{a}_1^{n-1}),\ a_2^{n-1} = (\Sigma^{n-2}, \mathfrak{a}_2^{n-1}), \quad \text{wobei} \quad \Sigma^{n-2} = \{a_1^{n-2}, a_2^{n-2}\};\\
&\quad a^n = (\Sigma^{n-1}, \mathfrak{a}^n), \quad \text{wobei} \quad \Sigma^{n-1} = \{a_1^{n-1}, a_2^{n-1}\}\}.
\end{aligned}$$

Jede Mannigfaltigkeit, die der angeschriebenen verwandt (im weiteren Sinne) ist, heißt eine n-dimensionale *Elementarmannigfaltigkeit*; in Zeichen: E^n.

81. Eine Mannigfaltigkeit heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sie entweder eine sphärische oder eine Elementarmannigfaltigkeit ist.

§ 6.

Vorbereitungen zum Hauptsatz für n-dimensionale Komplexe.

82. Es ist zu untersuchen, ob der Hauptsatz über Unterteilungen: *Werden aus einem Komplex P durch Unterteiluug zwei verschiedene Komplexe Q und R abgeleitet, so gibt es zu Q und R einen gemeinsamen unterteilten Komplex S*, dessen Richtigkeit für den Fall von ein und zwei Dimensionen bewiesen wurde (§§ 2, 4), auch für höhere Dimensionszahl gilt. Aus diesem Satz würde dann (vgl. 17, 50) der Satz folgen, daß zwei Komplexe, die einem dritten Komplex verwandt (im eigentlichen Sinne) sind, unter sich verwandt (im eigentlichen Sinne) sind. Der Begriff *verwandt im weiteren Sinne* hätte dann nur formale Bedeutung.

83. Die Untersuchung des Hauptsatzes soll zunächst ganz allgemein für eine Dimensionszahl n genau analog dem Fall von zwei Dimensionen (§ 2) angesetzt werden. Dabei wird angenommen, der Satz gelte für den Fall von $(n-1)$ Dimensionen. Erst wo es nötig wird, auf die besonderen Eigenschaften gerade der niederen Dimensionen Rücksicht zu nehmen, sollen die Dimensionen drei und vier gesondert behandelt werden.

84. Zunächst sollen gewisse Reihen sukzessiver elementarer Unterteilungen eines n-dimensionalen Komplexes zu je einem Operationsbegriff zusammengefaßt werden durch die Erklärung:

Unter einer *primitiven* Unterteilung eines n-dimensionalen Komplexes P wollen wir eine solche Unterteilung des Komplexes P verstehen, bei der sich in der Reihe der aufeinanderfolgenden elementaren Unterteilungen keine elementare Unterteilung $(n-1)$-ter Ordnung auf eine solche Zelle $(n-1)$-ter Dimension bezieht, welche zum Zweck einer elementaren Unterteilung n-ter Ordnung neu eingeführt wurde.

85. Ist ein Komplex Q durch eine primitive Unterteilung aus einem n-dimensionalen Komplex P abgeleitet unter Angabe der zu seiner Ableitung angewandten sukzessiven elementaren Unterteilungen, so denken wir uns das Verfahren zu seiner Gewinnung für unsere Zwecke abgeändert, indem wir die einzelnen vorgeschriebenen elementaren Unterteilungen gewissermaßen umordnen und in zwei Operationsschritten zusammenfassen.

I. Im *ersten Schritt* der primitiven Unterteilung werden die elementaren Unterteilungen erster bis $(n-1)$-ter Ordnung zusammengefaßt, wie

sie in der Gesamtreihe der elementaren Unterteilungen vorgeschrieben sind; sie beziehen sich alle auf Zellen m-ter Dimension, $m < n$, die in dem Gerüst $\bar{P}$ des Komplexes P enthalten sind oder doch aus solchen in $\bar{P}$ enthaltenen Zellen entstehen. Der Komplex P^*, welcher durch diesen ersten Schritt der primitiven Unterteilung aus P entsteht, läßt sich mithin so beschreiben:

a) Das Gerüst $\bar{P}^*$ des Komplexes P^* ist abgeleitet[14]) aus dem Gerüst $\bar{P}$ von P.

b) Die Elemente n-ter Dimension im Komplex P^* sind identisch mit denen von P. Der Rand Σ^{*n-1} eines jeden solchen Elements ist gleich oder abgeleitet aus dem Rand Σ^{n-1} des entsprechenden Elements in P.

II. Im *zweiten Schritt* der primitiven Unterteilung sollen die elementaren Unterteilungen n-ter Ordnung zusammengefaßt folgen. Dabei ist natürlich zu beachten, daß die Vorschrift für die einzelne elementare Unterteilung n-ter Ordnung insofern abzuändern ist, als an Stelle des Randes Σ^{n-1} der zu unterteilenden Zelle jetzt deren Ableitung Σ^{*n-1} tritt. Um für den zweiten Schritt der primitiven Unterteilung des Komplexes P eine zusammenfassende Beschreibung zu bekommen, ist folgendes zu bemerken:

Wird eine n-dimensionale Zelle a^n durch eine neue $(n-1)$-dimensionale Zelle x^{n-1} unterteilt und nachfolgend eine andere Zelle b^n durch eine neue $(n-1)$-dimensionale Zelle y^{n-1} unterteilt, so kann man die Reihenfolge dieser beiden Operationen ohne weiteres vertauschen.

Wird eine n-dimensionale Zelle a^n durch eine neue $(n-1)$-dimensionale Zelle x_1^{n-1} unterteilt und nachfolgend eine der beiden aus a^n entstehenden n-dimensionalen Zellen wieder unterteilt durch eine neue Zelle x_2^{n-1} (ohne daß vorher x_1^{n-1} unterteilt worden ist gemäß der Definition der primitiven Unterteilung!), so läßt sich zunächst von jeder der beiden $(n-2)$-dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeiten Σ_1^{n-2} und Σ_2^{n-2}, welche x_1^{n-1} und x_2^{n-1} beranden, aussagen, daß sie ganz auf einer der beiden $(n-1)$-dimensionalen Elementarmannigfaltigkeiten liegt, in welche gerade die andere $(n-2)$-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit den Rand der Zelle a^n zerlegt[15]).

Diesen Sachverhalt fassen wir in die Worte: Σ_1^{n-2} und Σ_2^{n-2} *kreuzen sich* auf dem Rand von a^n *nicht*. Dabei wird zugelassen, daß Σ_1^{n-2} und Σ_2^{n-2} beliebig viele Elemente gemeinsam haben oder auch ganz zusammen-

[14]) Wenn die primitive Unterteilung sich nur aus elementaren Unterteilungen n-ter Ordnung zusammensetzt, ist $P^* = P$ zu setzen.

[15]) Daß auch Σ_2^{n-2} auf dem Rand von a^n liegt und diesen Rand in zwei Elementarmannigfaltigkeiten zerlegt, ist evident.

fallen. Weiterhin erkennt man, daß zum Schluß genau der gleiche abgeleitete Komplex erhalten wird, wenn man erst die Zelle a^n unterteilt mittels der neuen $(n-1)$-dimensionalen Zelle x_2^{n-1} und hierauf eine der beiden entstehenden Zellen — nämlich diejenige, auf deren Rand dann Σ_1^{n-2} liegt — unterteilt mittels der neuen Zelle x_1^{n-1}. In diesem Sinne werde schlechthin gesagt, die Zelle a^n werde durch die beiden $(n-1)$-dimensionalen Zellen x_1^{n-1} und x_2^{n-1} (mehrfach) unterteilt.

Indem wir das Ergebnis dieser Überlegungen beliebig oft anwenden, können wir den zweiten Schritt unserer primitiven Unterteilung so beschreiben:

a) Auf beliebigen n-dimensionalen Zellen des Komplexes P^* werden je beliebig viele $(n-2)$-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeiten bezeichnet, deren jede für sich den Rand der betreffenden Zelle in zwei Elementarmannigfaltigkeiten zerlegt und von denen je zwei zu derselben n-dimensionalen Zelle gehörende sich auf dem Rand dieser Zelle nicht kreuzen.

b) Diese n-dimensionalen Zellen des Komplexes P^* werden durch neue $(n-1)$-dimensionale Zellen, welche von den soeben bezeichneten $(n-2)$-dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeiten berandet sind, unterteilt.

Damit entsteht aus P^* der Komplex Q. Enthält etwa die primitive Unterteilung von P gar keine elementare Unterteilung n-ter Ordnung, so ist $Q = P^*$ zu setzen.

86. Es seien aus einem n-dimensionalen Komplex P zwei verschiedene Komplexe Q und R je durch eine primitive Unterteilung abgeleitet. Wir denken uns diese primitiven Unterteilungen je in zwei Schritte, wie soeben besprochen, zerlegt und bezeichnen wie früher (§ 4, 39):

$$P, P_{10}, P_{20} = Q;$$
$$P, P_{01}, P_{02} = R,$$

wobei P_{10} und P_{01} aus dem Komplex P durch den ersten Schritt, P_{20} und P_{02} aus P_{10} bzw. P_{01} durch den zweiten Schritt der betreffenden primitiven Unterteilung gewonnen seien.

87. Die beiden Komplexe P_{10} und P_{01} sind aus dem Komplex P je durch den ersten Schritt einer primitiven Unterteilung gewonnen. Es sind also (85, I a) die $(n-1)$-dimensionalen Gerüste $\bar{P}_{10}$ und $\bar{P}_{01}$ beide aus dem Gerüst $\bar{P}$ des Komplexes P abgeleitet und besitzen, wenn der Hauptsatz für die Dimensionszahl $n-1$ gilt (83), einen gemeinsamen abgeleiteten Komplex $\bar{P}_{11}$. Es entsteht ein gemeinsamer abgeleiteter Komplex P_{11} sowohl aus P_{10} wie aus P_{01}, indem man das Gerüst $\bar{P}_{10}$ bzw. $\bar{P}_{01}$ durch $\bar{P}_{11}$ ersetzt unter Beibehaltung der Elemente n-ter Dimension.

88. Aus P_{10} ist der Komplex P_{20} abgeleitet durch den zweiten Schritt einer primitiven Unterteilung, d. h. durch eine Reihe von elementaren Unterteilungen n-ter Ordnung. Andererseits wurde soeben aus P_{10} der Komplex P_{11} abgeleitet durch ein Verfahren, das nur elementare Unterteilungen erster bis $(n-1)$-ter Ordnung umfaßt. Es läßt sich daher ein gemeinsamer abgeleiteter Komplex P_{21} gewinnen sowohl aus P_{20} durch elementare Unterteilungen erster bis $(n-1)$-ter Ordnung als aus P_{11} durch solche n-ter Ordnung.

89. Ebenso läßt sich ein unterteilter Komplex P_{12} ableiten sowohl aus P_{02} durch eine Reihe von elementaren Unterteilungen erster bis $(n-1)$-ter Ordnung als aus P_{11} durch elementare Unterteilungen n-ter Ordnung.

90. Nun bleibt noch die Aufgabe, zu den Komplexen P_{21} und P_{12}, die beide aus P_{11} je durch eine Reihe von Unterteilungen n-ter Ordnung abgeleitet sind, einen gemeinsamen unterteilten Komplex $P_{22} = S$ zu suchen. Hier müssen wir auf die speziellen Werte der Dimensionszahl n eingehen. Wir werden diese Aufgabe für die Dimensionszahl 3 und (unter gewissem Vorbehalt) für die Dimensionszahl 4 in der Weise lösen, daß wir aus P_{21} und P_{12} erst durch je eine Reihe von elementaren Unterteilungen $(n-1)$-ter Ordnung die Komplexe P_{21}^* und P_{12}^* ableiten und aus diesen dann durch elementare Unterteilungen n-ter Ordnung einen gemeinsamen unterteilten Komplex $P_{22} = S$ bilden.

91. In völliger Analogie mit dem Ergebnis im Fall von zwei Dimensionen (48) können wir alsdann auch für drei und vier Dimensionen das Resultat buchen:

Sind aus einem n-dimensionalen Komplex zwei verschiedene Komplexe Q und R durch primitive Unterteilung abgeleitet, so gibt es zu Q und R einen gemeinsamen unterteilten Komplex S, welcher sowohl aus Q wie aus R durch primitive Unterteilung entsteht.

92. Aus diesem Ergebnis folgt aber, wie schon bei Komplexen von zwei Dimensionen gezeigt wurde (49), die Richtigkeit unseres Hauptsatzes im allgemeinsten Fall.

§ 7.

Ausführung des Beweises für drei Dimensionen.

Der wesentlichste Teil des Beweises unseres Hauptsatzes ist die Erledigung der in Nr. 90 gestellten Aufgabe, nämlich aus zwei Komplexen P_{21} und P_{12}, die beide aus demselben Komplex P_{11} je durch eine Reihe von elementaren Unterteilungen n-ter Ordnung abgeleitet sind, einen gemeinsamen unterteilten Komplex P_{22} abzuleiten.

93. Verwendet wird hierbei ein Zerlegungssatz:

Satz (Z). Eine m-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit Σ^m wird durch jede auf ihr liegende $(m-1)$-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit Σ^{m-1} in zwei Elementarmannigfaltigkeiten E_1^m und E_2^m zerlegt.

Die Anwendung dieses Satzes geschieht so, daß wir für den Beweis des Hauptsatzes im Falle $n=3$ den Zerlegungssatz (Z) für $m=2$ und für den Beweis des Hauptsatzes im Falle $n=4$ den Zerlegungssatz für $m=3$ benötigen. Während für $m=2$ der Zerlegungssatz (Z) aus dem Eulerschen Polyedersatz gefolgert werden kann (vgl. 57 und Fußnote 11), wurde bei den Untersuchungen für den Fall $n=4$ die Richtigkeit des Satzes (Z) für $m=3$ hypothetisch vorausgesetzt. Wenn nun auch an der Richtigkeit des Satzes (Z) nicht zu zweifeln ist, so liegt doch hier — vom Standpunkte einer vollständigen Durchführung im Kombinatorischen so lange eine Lücke vor, als ein Beweis allgemein oder wenigstens für $m=3$ noch nicht erbracht ist[15a]).

94. Es liege folgender Spezialfall vor:

Gegeben ist ein dreidimensionaler Komplex T, welcher nur aus einer einzigen Raumzelle a^3 besteht:

$$T=\{a^3=(\Sigma^2, \mathfrak{a}^3)\}.$$

Aus diesem Komplex T seien zwei verschiedene Komplexe U und V je durch eine elementare Unterteilung dritter Ordnung abgeleitet. Einmal werde a^3 unterteilt durch ein neues Flächenstück

$$x^2=(\Sigma_x^1, \mathfrak{x}^2),$$

dessen Rand Σ_x^1 die Kugelfläche Σ^2 in die beiden Elementarflächen $E_{u_1}^2$ und $E_{u_2}^2$ zerlegt. Wir schreiben den somit abgeleiteten Komplex:

$$U=\{u_1^3=(\Sigma_{u_1}^2, \mathfrak{u}_1^3),\ u_2^3=(\Sigma_{u_2}^2, \mathfrak{u}_2^3)\},$$

wobei

$$\Sigma_{u_1}^2=\{E_{u_1}^2, x^2\}, \qquad \Sigma_{u_2}^2=\{E_{u_2}^2, x^2\}.$$

Das andere Mal werde a^3 unterteilt durch ein neues Flächenstück

$$y^2=(\Sigma_y^1, \mathfrak{y}^2),$$

dessen Rand E_y^1 die Kugelfläche Σ^2 in die beiden Elementarflächen $E_{v_1}^2$ und $E_{v_2}^2$ zerlegt. Wir schreiben den dadurch abgeleiteten Komplex:

$$V=\{v_1^3=(\Sigma_{v_1}^2, \mathfrak{v}_1^3),\ v_2^3=(\Sigma_{v_2}^2, \mathfrak{v}_2^3)\},$$

wobei

$$\Sigma_{v_1}^2=\{E_{v_1}^2, y^2\}, \quad \Sigma_{v_2}^2=\{E_{v_2}^2, y^2\}.$$

15a) Vgl. Anm. 5a.

Man denke sich zum Zwecke einer anschaulichen Bezeichnung im Komplex U alle Elemente des Flächenstückes x^2 und in den Komplexen T und V alle Elemente der Kreislinie Σ_x^1 *blau*, ferner im Komplex V alle Elemente des Flächenstückes y^2 sowie in den Komplexen T und U alle Elemente der Kreislinie Σ_y^1 *gelb* markiert.

95. Wenn sich auf der Kugelfläche Σ^2 die blaue Kreislinie Σ_x^1 und die gelbe Kreislinie Σ_y^1 nicht kreuzen, so gewinnt man einen und denselben Komplex sowohl aus U durch Unterteilung einer seiner Raumzellen — eben derjenigen, auf welcher Σ_y^1 liegt [16]) — mittels Einführung des gelben Flächenstücks

$$y^2 = (\Sigma_y^1, \mathfrak{y}^2),$$

als auch aus V durch Unterteilung einer seiner Raumzellen — eben derjenigen, auf welcher die blaue Σ_x^1 liegt — mittels Einführung des blauen Flächenstücks

$$x^2 = (\Sigma_x^1, \mathfrak{x}^2).$$

96. Wenn sich aber auf der Kugelfläche Σ^2 die blaue Kreislinie Σ_x^1 und die gelbe Kreislinie Σ_y^1 kreuzen, verfahre man wie folgt:

I. Die blaue Kreislinie Σ_x^1 zerlegt die Kugelfläche Σ^2 in die beiden Elementarflächen $E_{u_1}^2$ und $E_{u_2}^2$. Von den Elementen der gelben Kreislinie Σ_y^1 liegen nun gewisse nur auf $E_{u_1}^2$, andere nur auf $E_{u_2}^2$, wieder andere liegen aber sowohl auf $E_{u_1}^2$ als auf $E_{u_2}^2$, das sind solche, welche mit blauen Elementen identisch sind. Über diese letzteren Elemente werde bestimmt: Ist unter ihnen etwa ein Streckenelement, so soll es *als Element der gelben* Σ_y^1 nur zu einer der Elementarmannigfaltigkeiten $E_{u_1}^2$ *oder* $E_{u_2}^2$ gehörend angesehen werden. Ebenso soll ein Punktelement *als Element der gelben* Σ_y^1 dann nur zu einer der beiden Elementarflächen $E_{u_1}^2$ bzw. $E_{u_2}^2$ gehörend angesehen werden, wenn die beiden ihm angehörenden gelben Streckenelemente nur zu jener einen Elementarfläche gehören. Diejenigen Punktelemente jedoch, welche gelben Streckenelementen angehören, die zu *verschiedenen* Elementarflächen $E_{u_1}^2$ und $E_{u_2}^2$ gehören, sollen auch als zu beiden Elementarflächen $E_{u_1}^2$ *und* $E_{u_2}^2$ gehörend gerechnet werden. Man überlegt sich, daß, wenn überhaupt Σ_x^1 und Σ_y^1 sich auf Σ^2 kreuzen, immer solche Punktelemente wie die zuletzt genannten vorhanden sein müssen, sonst könnte Σ_y^1 nicht zusammenhängend sein. Wir nennen diese Punktelemente die *Kreuzungselemente* der blauen Σ_x^1 mit der gelben Σ_y^1 und denken sie *grün* gekennzeichnet. Wenn künftig kurz von blauen oder gelben Elementen gesprochen wird, so sind die grünen Elemente sinngemäß miteinzubeziehen.

[16]) Daß Σ_y^1 die Randfläche der betreffenden Zelle von U in zwei Elementarflächen zerlegt, läßt sich auch ohne (Z) beweisen. Entsprechendes gilt für Σ_x^1.

Auf der Elementarfläche $E^2_{u_1}$ liegt ein gelber Komplex, der Teilkomplex der Kreislinie Σ^1_y ist, d. h. also eine oder mehrere Elementarlinien. Die Randelemente dieser gelben Elementarlinien sind gerade unsere grünen Kreuzungselemente, und wir wollen sie dementsprechend jetzt zu Punkte*paaren* zusammenfassen, so daß ein Punktepaar eben eine auf $E^2_{u_1}$ liegende Elementarlinie berandet.

Ein grünes Punktepaar zerlegt die gelbe Kreislinie Σ^1_y in zwei Elementarlinien, wovon die eine ganz auf $E^2_{u_1}$ liegt. Sind also auf Σ^1_y noch weitere grüne Punktepaare vorhanden, so müssen sie gerade auf der anderen von jenen beiden Elementarlinien liegen. Das besagt aber: Je zwei grüne Punktepaare kreuzen sich auf Σ^1_y nicht.

Eine auf $E^2_{u_1}$ liegende gelbe Elementarlinie zerlegt die $E^2_{u_1}$ in zwei Elementarflächen. Man kann das aus dem Zerlegungssatz (Z) (für $m = 2$) folgern, indem man die gelbe Elementarlinie je durch eine der blauen Elementarlinien, in welche ihr Randpunktepaar die Σ^1_x zerlegt, zu einer Kreislinie ergänzt denkt. Liegt also auf $E^2_{u_1}$ noch eine andere gelbe Elementarlinie, so muß sie, weil sie mit der ersteren kein Element gemeinsam hat, notwendig auf einer von jenen Elementarflächen liegen, in welche die erstere die Fläche $E^2_{u_1}$ zerlegt. Das grüne Randpunktepaar der zweitgenannten gelben Elementarlinie liegt also ganz auf einer von den zwei blauen Elementarlinien, in welche das grüne Randpunktepaar der erstgenannten gelben Elementarlinie die blaue Σ^1_x zerlegt. Das besagt aber: Je zwei grüne Randpunktepaare kreuzen sich auf der blauen Σ^1_x nicht.

II. Es sollen jetzt aus den Komplexen U und V je durch elementare Unterteilungen zweiter Ordnung die Komplexe U^* und V^* abgeleitet werden nach folgender Vorschrift:

a) Sowohl das blaue Flächenstück x^2 als auch das gelbe Flächenstück y^2 werden unterteilt durch neue grün gekennzeichnete Strecken, deren jede von einem der oben bestimmten grünen Punktepaare berandet ist. Die Flächenelemente, welche bei diesen Unterteilungen zweiter Ordnung an die Stelle des blauen Flächenelements $\mathfrak{x}^2$ bzw. des gelben Flächenelements $\mathfrak{y}^2$ treten, mögen wieder blau bzw. gelb gekennzeichnet sein. Somit entsteht aus dem blauen Flächenstück x^2 eine blaue Elementarfläche X^* und ebenso aus dem gelben Flächenstück y^2 eine gelbe Elementarfläche Y^*.

b) Im Komplex U werde das blaue Flächenstück x^2 ersetzt durch die blaue Elementarfläche X^*; im Komplex V werde das gelbe Flächenelement y^2 ersetzt durch die gelbe Elementarfläche Y^*. Die neuen Komplexe U^* und V^* sind somit je durch elementare Unterteilungen zweiter Ordnung aus den Komplexen U und V abgeleitet.

III. Auf dem Komplex U^* liegt nun auch das gesamte Gerüst $\overline{Y}^*$ der gelben Elementarfläche Y^*, bestehend aus der gelben Σ_y^1 und grünen Streckenelementen, welche ja mit denen von X^* identisch sind. Jede Kreislinie, die in Y^* ein Flächenelement berandet, liegt vollständig auf einer der Raumzellen von U^* und wenn etwa zwei solche Kreislinien auf ein und derselben Raumzelle von U^* liegen, so kreuzen sie sich auf deren Rand nicht, denn sie haben dann kein Element gemeinsam. Nach dem Zerlegungssatz (Z) für $m = 2$ (93) zerlegt jede solche Kreislinie die Randfläche der betreffenden Raumzelle in zwei Elementarflächen.

Es soll nunmehr aus dem Komplex U^* durch elementare Unterteilungen dritter Ordnung ein Komplex W abgeleitet werden, indem die beiden Raumzellen von U^* unterteilt werden durch Einführung gelb gekennzeichneter Flächenstücke, deren Randlinien die soeben genannten Kreislinien von $\overline{Y}^*$ sind. Die Gesamtheit der eingeführten gelben Flächenstücke ist gleich dem gelben Y^*. Vergleicht man andererseits den so aus U^* abgeleiteten Komplex W mit dem Komplex V^*, so erkennt man ohne weiteres, daß sich der gleiche Komplex W auch aus V^* durch elementare Unterteilungen dritter Ordnung ableiten läßt. Der Komplex V^* enthält nämlich das Gerüst X^* der blauen Elementarfläche X^*, so zwar, daß man die Raumzellen von V^* unterteilen kann durch blau gekennzeichnete Flächenstücke, deren Gesamtheit gleich der blauen Elementarfläche X^* ist.

IV. Zu bemerken ist noch, daß die grünen Kreuzungspunktelemente im allgemeinen auf sehr mannigfache Weise zu Punktepaaren zusammengefaßt werden können, so daß sie den Vorbedingungen für die Unterteilungen nach Ziffer II und III genügen. Unsere Festsetzung (I, 2. Absatz) soll nur als Beispiel dienen.

97. Zusammenfassend ergibt sich für den in Nr. 94 aufgestellten Spezialfall unserer Aufgabe das Resultat, daß sowohl aus U wie aus V ein gemeinsamer unterteilter Komplex W abgeleitet werden kann durch Unterteilungen zweiter Ordnung — die indes auch fehlen können (95) — und darauffolgende Unterteilungen dritter Ordnung.

98. Ganz entsprechend wie in dem soeben erledigten Spezialfall ist im allgemeinen Fall vorzugehen:

Aus dem dreidimensionalen Komplex P_{11} sind je durch Unterteilungen dritter Ordnung die beiden Komplexe P_{21} und P_{12} gewonnen. Der Komplex der Flächenstücke, welche zur Ableitung von P_{21} aus dem Komplex P_{11} neu einzuführen sind, sei der Flächenkomplex X; er möge auf P_{21}, sein Gerüst X auf P_{11} und auf P_{12} blau gekennzeichnet werden. Der Komplex der Flächenstücke, welche bei der Ableitung von P_{12} aus P_{11} neu eingeführt werden, sei der Komplex Y; er möge auf P_{12}, sein Gerüst Y auf P_{11} und auf P_{21} gelb gekennzeichnet werden.

99. Im allgemeinen wird es wohl vorkommen, daß auf einer Raumzelle von P_{11} verschiedene blaue und gelbe Kreislinien sich kreuzen, die im Komplex X bzw. Y solche Flächenstücke berandeu, welche zur Unterteilung der betreffenden Raumzelle von P_{11} bestimmt sind. Zunächst sind (entsprechend Nr. 96, I, erster Absatz) die — grünen — Kreuzungselemente jeder blauen mit jeder zur selben Raumzelle von P_{11} gehörenden gelben Kreislinie zu bezeichnen. Diese grünen Punktelemente müssen wieder geeignet zu Punktepaaren zusammengenommen werden. Man denke sich etwa auf einer Raumzelle von P_{11} zwar alle gelben, aber nur eine blaue Kreislinie markiert und bestimme (genau wie in Nr. 96, I, zweiter Absatz), daß alle Randpunktepaare derjenigen gelben Elementarlinien, welche zu einer von den beiden Elementarflächen gehören, in die jene blaue Kreislinie die Randfläche der Raumzelle zerlegt, als grüne Kreuzungspunkte*paare* angesprochen werden sollen. Je zwei solche Punktepaare kreuzen sich dann auf einer gelben Kreislinie nicht; sie kreuzen sich aber auch auf der blauen Kreislinie nicht, mögen sie beide zur selben oder zu verschiedenen gelben Kreislinien gehören. Da zwei gelbe Kreislinien auf ein und derselben Raumzelle wohl Elemente gemein haben können, so können natürlich auch zwei grüne Punktepaare teilweise oder ganz zusammenfallen. Nun denke man sich die betreffende Raumzelle unterteilt durch ein blaues Flächenelement, welches die erst markierte blaue Kreislinie zum Rand hat. Ferner denke man sich bereits die später folgende Unterteilung (II) vorweggenommen, nämlich man teile dieses blaue Flächenstück durch grüne Strecken, die von den bisher bezeichneten grünen Punktepaaren berandet sind. Auf jeder der beiden Raumzellen, welche durch die blaue Unterteilung entstanden sind, liegen nun gelbe Kreislinien (grüne Elemente mitgerechnet!). Denkt man sich jetzt erst eine zweite blaue Kreislinie markiert, so kann man die Kreuzungselemente, die zu ihr und den gelben Kreislinien derselben Raumzelle gehören, wieder in der gleichen Weise zu grünen Punktepaaren gruppieren. Sind noch mehr blaue Kreislinien vorhanden, so fahre man stets in derselben Weise fort. Man erreicht durch dieses Verfahren der Zusammenfassung zu Punktepaaren, daß schließlich irgendzwei auf ein und derselben blauen oder auf ein und derselben gelben Kreislinie liegende Punktepaare sich nicht kreuzen und daß auch nach Ausführung der folgenden Unterteilungen zweiter Ordnung (II) die Vorbedingung für die letzten Unterteilungen dritter Ordnung (III) erfüllt sind.

II. Sind also überhaupt auf P_{11} grüne Kreuzungspunktelemente vorhanden und sind diese in geeigneter Weise zu Punktepaaren zusammengefaßt, so sollen aus den Komplexen P_{21} und P_{12} je durch Unterteilungen zweiter Ordnung die Komplexe P_{21}^* und P_{12}^* abgeleitet werden nach folgender Vorschrift:

a) Sowohl im blauen Flächenkomplex X als auch im gelben Flächenkomplex Y werden Flächenstücke unterteilt durch Einführung neuer *grüner* Strecken, deren jede von einem grünen Punktepaar berandet ist, das auf dem Randkreis des betreffenden Flächenstückes liegt (und auf dieses Flächenstück zu beziehen ist)[17]). Die Flächenelemente, welche hierbei als Ersatz der blauen Flächenelemente von X bzw. der gelben Flächenelemente von Y eingeführt werden, seien wieder blau bzw. gelb gekennzeichnet. Somit entsteht aus X ein abgeleiteter blauer Flächenkomplex X^* und aus Y ein abgeleiteter gelber Flächenkomplex Y^*.

b) Im Komplex P_{21} werde der blaue Flächenkomplex X ersetzt durch den blauen Flächenkomplex X^*, im Komplex P_{12} werde ebenso der gelbe Flächenkomplex Y ersetzt durch den gelben Flächenkomplex Y^*.

III. Auf dem Komplex P_{21}^* liegt nun auch das gesamte Gerüst $\bar{Y}^*$ des gelben Flächenkomplexes Y^*, und zwar liegt, wenn eben früher die grünen Punktepaare geeignet bestimmt wurden (I), jede Kreislinie, die in Y^* ein gelbes Flächenelement berandet, vollständig auf einer Raumzelle von P_{21}^*, und wenn etwa mehrere solche Kreislinien auf ein und derselben Raumzelle liegen, so kreuzen sie sich auf deren Randfläche nicht.

Es soll jetzt aus dem Komplex P_{21}^* durch elementare Unterteilungen dritter Ordnung ein unterteilter Komplex P_{22} abgeleitet werden, indem diejenigen Raumzellen von P_{21}^*, auf denen die oben genannten Kreislinien von $\bar{Y}^*$ liegen, unterteilt werden durch Einführung gelber Flächenelemente, welche von jenen Kreislinien berandet sind. Die Gesamtheit der hierbei eingeführten gelben Flächenelemente samt ihren Randkreislinien ist offenbar dann gleich dem Flächenkomplex Y^*.

Vergleicht man andererseits den gefundenen Komplex P_{22} mit dem Komplex P_{12}^*, so erkennt man, daß sich der gleiche Komplex P_{22} auch aus P_{12}^* durch elementare Unterteilungen dritter Ordnung ableiten läßt. Der Komplex P_{12}^* enthält nämlich das Gerüst X^* des blauen Flächenkomplexes X^* und zwar so, daß man die einzelnen Raumzellen von P_{12}^* unterteilen kann mittels blauer Flächenstücke, deren Gesamtheit eben gleich jenem blauen Flächenkomplex X^* ist.

100. Zusammenfassend ergibt sich also das in Nr. 90 angekündigte Resultat, daß sich sowohl aus P_{21} wie aus P_{12} ein gemeinsamer unterteilter Komplex P_{22} ableiten läßt je durch elementare Unterteilungen

[17]) Es ist natürlich hier wie überhaupt in ähnlichen Fällen stets darauf zu achten, ob, wenn ich mich anschaulich ausdrücken darf, eine Linie *in bezug auf* diese oder jene Raumzelle blau bzw. gelb zu kennzeichnen ist, ob ein Punkt *in bezug auf* diese oder jene blaue oder gelbe Linie als grüner Punkt gilt oder ob er gegebenenfalls mehrfach zu zählen ist, weil er zu mehreren Punkte*paaren* gehört.

zweiter Ordnung und nachfolgende elementare Unterteilungen dritter Ordnung. Die elementaren Unterteilungen zweiter Ordnung können gegebenenfalls auch fehlen.

Damit ist unser Hauptsatz für den Fall von $n = 3$ Dimensionen vollkommen bewiesen.

§ 8.

Beweisgang für vier Dimensionen.

Um dieselbe Aufgabe (Nr. 90) auch für den Fall von vier Dimensionen in Angriff zu nehmen, werde wieder mit dem zu 94 (bzw. 48) entsprechenden Spezialfall begonnen:

101. Gegeben sei ein aus einer vierdimensionalen Zelle bestehender Komplex

$$T = \{a^4 = (\Sigma^3, \mathfrak{a}^4)\}.$$

Eine elementare Unterteilung vierter Ordnung mittels Einführung der neuen Raumzelle

$$x^3 = (\Sigma_x^2, \mathfrak{x}^3),$$

deren Rand Σ_x^2 die Σ^3 in die beiden Elementarmannigfaltigkeiten $E_{u_1}^3$ und $E_{u_2}^3$ zerlegt, ergibt den abgeleiteten Komplex

$$U = \{u_1^4 = (\Sigma_{u_1}^3, \mathfrak{u}_1^4),\ u_2^4 = (\Sigma_{u_2}^3, \mathfrak{u}_2^4)\},$$

wobei

$$\Sigma_{u_1}^3 = \{E_{u_1}^3, x^3\} \quad \text{und} \quad \Sigma_{u_2}^3 = \{E_{u_2}^3, x^3\}.$$

Eine andere elementare Unterteilung vierter Ordnung mittels Einführung der neuen Raumzelle

$$y^3 = (\Sigma_y^2, \mathfrak{y}^3),$$

deren Rand Σ_y^2 die Σ^3 in die beiden Elementarmannigfaltigkeiten $E_{v_1}^3$ und $E_{v_2}^3$ zerlegt, ergibt den abgeleiteten Komplex

$$V = \{v_1^4 = (\Sigma_{v_1}^3, v_1^4),\ v_2^4 = (\Sigma_{v_2}^3, \mathfrak{v}_2^4)\},$$

wobei

$$\Sigma_{v_1}^3 = \{E_{v_1}^3, y^3\}, \quad \Sigma_{v_2}^3 = \{E_{v_2}^3, y^3\}.$$

Der Anschaulichkeit wegen sei im Komplex U die Raumzelle x^3 und in den Komplexen T und V ihre Randfläche Σ_x^2 *blau*, ferner im Komplex V die Raumzelle y^3 und in den Komplexen T und V ihre Randfläche Σ_y^2 *gelb* gekennzeichnet.

102. Wenn sich auf der dreidimensionalen Sphäre Σ^3 die blaue Kugelfläche Σ_x^2 und die gelbe Kugelfläche Σ_y^2 nicht kreuzen, so gewinnt man einen und denselben abgeleiteten Komplex W sowohl aus U durch elementare Unterteilung einer vierdimensionalen Zelle von U — nämlich

derjenigen, auf welcher die gelbe Σ_y^2 liegt[18]) — mittels Einführung der gelben Raumzelle

$$y^3 = (\Sigma_y^2, \mathfrak{y}^3)$$

als auch aus V durch elementare Unterteilung einer der beiden Zellen von V — nämlich derjenigen, auf welcher Σ_x^2 liegt — mittels Einführung der blauen Raumzelle

$$x^3 = (\Sigma_x^2, \mathfrak{x}^3).$$

103. Wenn sich aber auf der dreidimensionalen Sphäre Σ^3 die blaue Kugelfläche Σ_x^2 und die gelbe Kugelfläche Σ_y^2 kreuzen, so verfahre man wie folgt:

A. I. Die blaue Kugelfläche Σ_x^2 zerlegt die Σ^3 in die beiden dreidimensionalen Elementarmannigfaltigkeiten $E_{u_1}^3$ und $E_{u_2}^3$. Von den Elementen der gelben Kugelfläche Σ_y^2 liegen nun gewisse nur auf $E_{u_1}^3$, andere nur auf $E_{u_2}^3$, wieder andere aber liegen sowohl auf $E_{u_1}^3$ wie auf $E_{u_2}^3$, nämlich diejenigen, welche mit blauen Elementen identisch sind und also zugleich zur Σ_x^2 gehören. Über diese letzteren Elemente werde bestimmt: Ist unter ihnen ein Flächenelement, so soll es *als Element der gelben* Σ_y^2 nur zu einer der Elementarmannigfaltigkeiten $E_{u_1}^3$ oder $E_{u_2}^3$ gehörend gerechnet werden. Ebenso soll ein Streckenelement oder ein Punktelement *als Element der gelben* Σ_y^2 dann nur zu einer der Mannigfaltigkeiten $E_{u_1}^3$ bzw. $E_{u_2}^3$ gehörend angesehen werden, wenn alle ihm angehörenden *gelben* Flächenelemente nur zu jener einen Elementarmannigfaltigkeit gehören. Diejenigen Streckenelemente und Punktelemente jedoch, welche gelben Flächenelementen angehören, die zu *verschiedenen* der beiden Elementarflächen $E_{u_1}^3$ und $E_{u_2}^3$ gehören, sollen auch als zu beiden Elementarmannigfaltigkeiten $E_{u_1}^3$ und $E_{u_2}^3$ zugleich gehörend gerechnet werden. Es gibt solche Elemente, sonst wäre Σ_y^2 nicht zusammenhängend. Wir nennen sie die Kreuzungselemente der blauen Σ_x^2 und der gelben Σ_y^2 und wollen sie grün kennzeichnen. Wenn weiterhin kurz von blauen oder gelben Elementen und Komplexen gesprochen wird, so sind diese grünen Elemente jedesmal sinngemäß einzubeziehen.

Auf der Elementarmannigfaltigkeit $E_{u_1}^3$ liegt ein gelber *Komplex*, der Teilkomplex der Kugelfläche Σ_y^2 ist. Der Umgebungskomplex eines seiner nicht-grünen Punkte in bezug auf den gelben Komplex ist eine Kreislinie. Wir betrachten weiters die Umgebung eines grünen Punktelementes. Sein Umgebungskomplex in bezug auf die dreidimensionale sphärische Mannigfaltigkeit Σ^3 ist eine Kugelfläche, die mit $(\Sigma^3)^2$ bezeichnet werden möge;

[18]) Daß Σ_y^2 die sphärische Randmannigfaltigkeit der betreffenden vierdimensionalen Zelle von U in zwei Elementarmannigfaltigkeiten zerlegt, läßt sich auch ohne (Z) beweisen. Entsprechendes gilt für Σ_x^2 auf einer Zelle von V. Vgl. Anm. 16.

seine Umgebungskomplexe in bezug auf die blaue Kugelfläche Σ_x^2 und in bezug auf die gelbe Kugelfläche Σ_y^2 sind eine blaue Kreislinie $(\Sigma_x^2)^1$ und eine gelbe Kreislinie $(\Sigma_y^2)^1$; wir denken uns diese beiden Kreislinien auf der Umgebungskugelfläche $(\Sigma^3)^2$ gekennzeichnet[19]). Die blaue Kreislinie $(\Sigma_x^2)^1$ zerlegt die $(\Sigma^3)^2$ in zwei Elementarflächen, welche die Umgebungskomplexe unseres grünen Punktes in bezug auf $E_{u_1}^3$ und $E_{u_2}^3$ darstellen und demgemäß mit $(E_{u_1}^3)^2$ und $(E_{u_2}^3)^2$ bezeichnet seien. Auf $(E_{u_1}^3)^2$ liegen eine oder mehrere gelbe Elementarlinien, die Teile der gelben $(\Sigma_y^2)^1$ sind; diese gelben Elementarlinien sind der Umgebungskomplex unseres grünen Punktes in bezug auf den Teilkomplex der gelben Kugelfläche $(\Sigma^3)^2$, welcher auf $E_{u_1}^3$ liegt.

Nun möge man für einen Augenblick diejenigen grünen Punktelemente, deren Umgebungskomplex in bezug auf den gelben Flächenkomplex auf $E_{u_1}^3$ aus *mehreren* Elementarlinien besteht, als mehrfach vorhanden ansehen und dabei jedem einfachen grünen Punktelement diejenigen gelben Flächenelemente und Streckenelemente angehörend rechnen, welche *einer* Umgebungselementarlinie entsprechen. Tut man das, so kann man auf Grund der Umgebungseigenschaft aussagen, daß der gesamte gelbe Komplex auf $E_{u_1}^3$ aus *Flächenmannigfaltigkeiten* besteht. Die Ränder dieser Flächen bestehen aber aus den grünen Kreuzungselementen der beiden Kugelflächen Σ_x^2 und Σ_y^2 und demnach würden sich die grünen Kreuzungselemente zu bestimmten grünen Kreislinien zusammensetzen. Daß bei diesem Schluß gewisse Punktelemente als mehrfach vorhanden angesehen wurden, erfordert noch eine Zusatzbemerkung. Erstens können nämlich verschiedene der gelben Flächen auf $E_{u_1}^3$ Randpunkte gemein haben, daraus folgt, daß unsere grünen Kreislinien untereinander Punkte gemein haben können. Zweitens aber kann auch eine gelbe Fläche sich in gewissen Punkten sozusagen selbst berühren, sie verliert damit streng genommen in diesen Punkten den Charakter einer Fläche, wir wollen sie eine Fläche mit singulären Punkten nennen. Hat eine gelbe Fläche einen singulären Randpunkt, so ist ihr Rand offenbar keine Kreislinie, wir wollen also zunächst das Vorkommen von solch singulären Punkten von unserer folgenden Betrachtung ausschließen.

II. Es soll gezeigt werden, daß sich zwei grüne Kreislinien weder auf der blauen Kugelfläche Σ_x^2 noch auf der gelben Kugelfläche Σ_y^2 kreuzen. Jede grüne Kreislinie zerlegt sowohl die blaue Σ_x^2 als auch die gelbe Σ_y^2 in zwei Elementarflächen nach dem Zerlegungssatz (Z) für $m = 2$ (Nr. 93). Würden sich zwei grüne Kreislinien kreuzen, so könnte das nur in Punktelementen stattfinden, die sie gemein haben. Einem solchen kritischen

[19]) Vgl. für das Folgende Nr. 96, I.

Punktelement gehören in jeder der beiden grünen Kreislinien zwei grüne Streckenelemente an und jedem solchen Paar von grünen Strecken entspricht im Umgebungskomplex $(\Sigma^3)^2$ des betreffenden Punktes ein grünes Punktepaar, das Randpunktepaar einer gelben auf $(E^3_{u_1})^2$ liegenden Elementarlinie ist. Wie sich jene beiden Umgebungspunktepaare weder auf der blauen Kreislinie $(\Sigma^2_x)^1$ noch auf der gelben Kreislinie $(\Sigma^2_y)^1$ kreuzen, so muß auch von den beiden Paaren grüner Streckenelemente, die unserm Punkt angehören, jedes ganz auf einer der Elementarflächen liegen, in welche diejenige grüne Kreislinie, der das andere Paar von Strecken zugehört, die blaue Kugelfläche Σ^2_x bzw. die gelbe Kugelfläche Σ^2_y zerlegt.

III. Es sind noch die grünen Streckenkomplexe zu behandeln, welche als Rand einer gelben auf $E^3_{u_1}$ liegenden Fläche mit singulären Punkten auftreten. Denkt man die singulären Punkte mehrfach vorhanden und die ihnen angehörenden grünen Streckenelemente wie bisher (I) paarweise den einfach zählenden Punktelementen zugeteilt, so erhält man formal eine Kreislinie, etwa:

$$\{g^1_1, g^0, g^1_2, E^1_1, h^1_1, g^0, h^1_2, E^1_2\},$$

wobei E^1_1 und E^1_2 ebenfalls formal Elementarlinien sind. Der Punkt g^0 ist hier zweimal verwendet und gehört sowohl dem Paar der Strecken g^1_1, g^1_2 als dem Paar h^1_1, h^1_2 an. Wir ändern diese Umgebungsgruppierung und zerlegen damit den gegebenen Komplex in

$$\{g^0, g^1_2, E^1_1, h^1_1\} \quad \text{und} \quad \{g^0, h^1_2, E^1_2, g^1_1\}.$$

Ob etwa E^1_1 und E^1_2 gegenseitig noch Punkte gemeinsam haben, wird nicht untersucht. Wenn dagegen in einem der angeschriebenen zwei Komplexe selbst noch ein und dasselbe Punktelement mehrfach vorkommt, so soll dieselbe Operation der „Umgebungsumgruppierung“ an diesem Komplex wiederholt werden. Das werde so oft wiederholt, bis der ursprünglich angeschriebene Komplex in lauter Kreise zerlegt ist. Diese Kreislinien — wir wollen sie zur Unterscheidung von den früher ausschließlich betrachteten (II) *neue* Kreise nennen — können gegenseitig je mehrere Punkte gemein haben; jedoch haben zwei neue Kreislinien höchstens *einen* solchen Punkt gemeinsam, dessen Umgebung — wie oben beim Punkte g^0 — umgruppiert worden ist. Da für gewöhnliche gemeinsame Punkte dieselbe Betrachtung wie in Nr. II gilt, so können sich also zwei neue Kreise aus unserm Streckenkomplex nicht kreuzen.

Würde irgendein andrer grüner Kreis einen *neuen* Kreis kreuzen, so müßten mindestens zwei Punkte mit umgruppierter Umgebung als Kreuzungselemente angegeben werden können. Man kann nun durch eine Unter-

suchung des Umgebungskomplexes eines jener angenommenen Kreuzungspunkte, die der in Nr. II angestellten analog ist, aber die neue Umgebungsgruppierung berücksichtigt, zeigen, daß dann jene grüne Kreislinie auch einen zweiten neuen Kreis kreuzen müßte, der mit dem ersten jenen Punkt gemeinsam hat. Auf der zweiten neuen Kreislinie müßte also wieder ein weiterer Kreuzungspunkt, d. i. wieder ein Punkt mit neuer Umgebungsgruppierung liegen. Nun ergibt sich aber aus der Vorschrift über die Bildung der *neuen* Kreislinien oben sofort, daß derartige Ketten von neuen Kreisen, wie sie hier auftreten müßten, nämlich solche, in den jeder einem vorhergehenden folgende Kreis mit jenem einen Punkt mit neuer Umgebungsgruppierung gemein hat, nie zyklisch sein können, sondern schließlich immer mit einem Kreis enden, der nur einen solchen Punkt enthält. Somit stoßen wir auf Widerspruch. Irgend zwei grüne Kreise (früherer oder neuer Art) kreuzen sich auf Σ_x^2 und auf Σ_y^2 nicht.

B. Aus den Komplexen U und V sollen je durch Unterteilungen dritter Ordnung die Komplexe U^* und V^* abgeleitet werden nach folgender Vorschrift:

a) Sowohl die Raumzelle

$$x^3 = (\Sigma_x^2, \mathfrak{x}^3)$$

als auch die Raumzelle

$$y^3 = (\Sigma_y^2, \mathfrak{y}^3)$$

werde unterteilt durch Einführung neuer grün gekennzeichneter Flächenelemente, welche von den in A beschriebenen grünen Kreislinien berandet sind. Die Raumelemente, welche hierbei als Ersatz für das blaue Raumelement $\mathfrak{x}^3$ und das gelbe Raumelement $\mathfrak{y}^3$ eintreten, seien wieder blau bzw. gelb bezeichnet. Somit entsteht aus der blauen Raumzelle x^3 ein blauer Elementarraum X^* und aus der gelben Raumzelle y^3 ein gelber Elementarraum Y^*.

b) Im Komplex U werde die blaue Raumzelle x^3 durch den blauen Elementarraum X^*, ebenso im Komplex V die gelbe Raumzelle y^3 durch den gelben Elementarraum Y^* ersetzt.

C. Der Komplex U^* enthält jetzt auch das gesamte Gerüst Y^* des gelben Elementarraums Y^*, und zwar liegt jede Kugelfläche, welche in Y^* ein Raumelement berandet, vollständig auf einer der beiden vierdimensionalen Zellen von U^*; wenn aber zwei solche Kugelflächen auf ein und derselben vierdimensionalen Zelle von U^* liegen, so kreuzen sie sich auf dem Rand jener Zelle nicht. Nehmen wir den Zerlegungssatz (Z) als richtig für $m = 3$ an (93), so folgt aus ihm, daß jede solche Kugelfläche den Rand der vierdimensionalen Zelle in zwei dreidimensionale Elementarmannigfaltigkeiten (Elementarräume) zerlegt.

Aus dem Komplex U^* werde ein unterteilter Komplex W abgeleitet, indem man die beiden vierdimensionalen Zellen von U^* unterteilt mittels Einführung gelb gekennzeichneter Raumelemente, die von den soeben erwähnten gelben Kugelflächen berandet sind. Die Gesamtheit der eingeführten gelben Raumzellen ist gleich Y^*.

Vergleicht man andererseits den aus U^* abgeleiteten Komplex W mit dem Komplex V^*, so erkennt man, daß W auch aus V^* durch Unterteilungen vierter Ordnung zu gewinnen ist. Die Gesamtheit der hierbei einzuführenden Raumzellen ist gleich dem blauen Elementarraum X^*.

104. Zusammenfassend ergibt sich für den in Nr. 101 aufgestellten Spezialfall unserer Aufgabe das Resultat, daß sowohl aus U wie aus V ein gemeinsamer abgeleiteter Komplex W gewonnen wird durch Unterteilungen dritter Ordnung — die gegebenenfalls fehlen können — und nachfolgende Unterteilungen vierter Ordnung.

105. Aus dem soeben erledigten Spezialfall ergibt sich die Lösung des allgemeinen Falles. Die Überlegungen sind den in Nr. 98 bei drei Dimensionen angestellten so völlig gleichlaufend, daß wir hier nicht näher darauf eingehen.

§ 9.

Hinweis auf höhere Dimensionen.

106. Um zu sehen, wie die Verhältnisse bei mehr als vier Dimensionen liegen, denke man wieder an den Spezialfall, daß nämlich aus einer n-dimensionalen Zelle je durch eine elementare Unterteilung n-ter Ordnung zwei verschiedene Komplexe von je zwei n-dimensionalen Zellen abgeleitet sind. Es wird sich zunächt wieder darum handeln, im Fall des Kreuzens der beiden $(n-2)$-dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeiten, nämlich der blauen Σ_x^{n-2} und der gelben Σ_y^{n-2}, welche die zur Teilung neu einzuführenden Elemente $(n-1)$-ter Dimension beranden, deren Kreuzungselemente zu bestimmen. Vermutlich lassen sich diese grün gekennzeichneten Kreuzungselemente dann wieder zu $(n-3)$-dimensionalen *Mannigfaltigkeiten* zusammenfassen. Im Falle $n=3$ waren diese Kreuzungsmannigfaltigkeiten Punktepaare, im Falle $n=4$ waren es Kreislinien, also in beiden Fällen einfach zusammenhängende, nämlich sphärische Mannigfaltigkeiten. Schon im Falle $n=5$ müssen wir aber damit rechnen, daß diese grünen Kreuzungsmannigfaltigkeiten nicht notwendig Kugelflächen zu sein brauchen, sondern auch andere unberandete Flächen — Flächen höheren Zusammenhangs — sein können. Die in Nr. 96, II und 103, B ausgeführte Unterteilung der blauen und der gelben $(n-1)$-dimensionalen Zelle läßt sich dann nicht übertragen.

107. Vor allem wäre es erforderlich zu wissen, in welcher Weise zwei auf einer $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit Σ^{n-1} liegende und sich kreuzende $(n-2)$-dimensionale sphärische Mannigfaltigkeiten Σ_x^{n-2} und Σ_y^{n-2} von den Mannigfaltigkeiten ihrer Kreuzungselemente zerlegt werden[20]). Um diese Fragestellung zu erläutern, denke man an zwei dreidimensionale sphärische Räume Σ_x^3 und Σ_y^3 und nehme etwa an, die beiden Räume, die auf einer Σ^4 liegen sollen, kreuzen sich, und zwar sei die Kreuzungsmannigfaltigkeit eine Fläche vom Geschlecht 1, eine Torusfläche. Nun kann eine Torusfläche als Randfläche von Teilen einer dreidimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit auftreten, die untereinander durchaus nicht verwandt sind[21]). Es fragt sich aber, ob auf einer vierdimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit etwa zwei dreidimensionale sphärische Mannigfaltigkeiten so liegen können, daß eine Torusfläche, in der sie sich durchdringen — wenn ich anschaulich sprechen darf —, in bezug auf die eine dreidimensionale Sphäre wie ein gewöhnlicher Wulst aussieht, in bezug auf die andere dreidimensionale Sphäre aber wie eine Kugel, aus der ein in beliebigen Knoten gewundener Kanal ausgebohrt ist, oder ob nicht doch jene Torusfläche in bezug auf die beiden Raumsphären gleichartig gelagert sein muß. Solche noch unbeantwortete Fragen stehen einer Ausdehnung des Beweisverfahrens auf $n \geqq 5$ Dimensionen im Wege.

Erlangen, Mathem. Seminar der Universität, August 1922.

---

[20]) Zunächst freilich wäre zu zeigen, daß sie überhaupt zerlegt werden. Das stellt eine weitere Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes (Z) dar.

[21]) Gewöhnlicher Wulst oder Kugel mit ausgebohrtem Knoten, vgl. Tietze a. a. O. § 15 (Fig. 3).

(Eingegangen am 19. August 1922.)

Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Die Aufgabe. Unter- und Oberfunktionen.

Sei ein ebenes beschränktes Gebiet G gegeben (Gebiet = zusammenhängende Menge von lauter *inneren* Punkten). Es braucht nicht schlicht zu sein, sondern darf Teile der Ebene mehrfach bedecken (Fig. 1 und 2); doch soll G keine Windungspunkte enthalten. Über den Rand R des Gebietes G braucht vorläufig gar nichts vorausgesetzt zu werden; er darf z. B. auch Windungspunkte enthalten (Fig. 2). Nun stellen wir die folgende

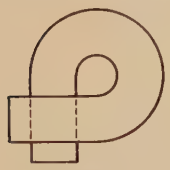

Fig. 1.

Fig. 2.

Randwertaufgabe. *Auf dem Rand R sei eine beschränkte Funktion f gegeben; ihre untere und obere Limesfunktion seien $\underline{f}$ und $\bar{f}$. Gesucht wird eine Funktion u im abgeschlossenen Bereich $G + R$, die den folgenden beiden Bedingungen genügt:*

I. *Die untere und obere Limesfunktion $\underline{u}$ und $\bar{u}$ erfüllen auf dem Rand R die Ungleichungen*[1])

$$\underline{f} \leqq \underline{u} \leqq \bar{u} \leqq \bar{f}.$$

II. *Im Gebiet G ist u harmonisch; d. h. in G ist u nebst den partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ stetig und genügt der partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

[1]) Da u den Definitionsbereich $G + R$ hat, so sind die Limesfunktionen $\underline{u}$, $\bar{u}$ natürlich nicht wie $\underline{f}$, $\bar{f}$ in bezug auf R, sondern in bezug auf $G + R$ zu verstehen.

In der Bedingung I steckt insbesondere die Forderung, daß überall da, wo die Randfunktion f stetig ist, auch u stetig ist und den gleichen Wert wie f annimmt; das ist die gewöhnliche Formulierung der Randwertaufgabe. Wir wollen jetzt die Bedingung II in eine etwas andere Form kleiden. Zu dem Zweck bezeichnen wir die Punkte von $G + R$ mit kleinen deutschen Buchstaben und demgemäß den Wert einer Funktion v im Punkt $\mathfrak{x}$ mit $v(\mathfrak{x})$. Ist dann K ein Kreis[2]), und v eine im abgeschlossenen Bereich $G + R$ definierte beschränkte Funktion, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_K v$ eine Funktion, die ebenfalls den Definitionsbereich $G + R$ hat, und zwar soll $\mathfrak{M}_K v$ außerhalb und auf der Peripherie von K mit v übereinstimmen, aber innerhalb K gleich dem über die Peripherie erstreckten und mit den Peripheriewerten von v gebildeten Poissonschen Integral sein; es werden nur solche Funktionen v in Betracht kommen, bei denen die Existenz des Integrals mindestens im Lebesgueschen Sinne von vornherein feststeht. Da die Peripheriewerte im Poissonschen Integral linear auftreten, so ist hiernach $\mathfrak{M}_K$ ein distributiver Operator, d. h. wenn α_1, α_2 Konstanten und v_1, v_2 Funktionen sind, so ist

$$\alpha_1 \mathfrak{M}_K v_1 + \alpha_2 \mathfrak{M}_K v_2 = \mathfrak{M}_K (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2).$$

Außerdem hat bekanntlich, wenn v eine Konstante ist, auch $\mathfrak{M}_K v$ denselben konstanten Wert, und wenn $v_1 \geqq v_2$ ist, so ist auch $\mathfrak{M}_K v_1 \geqq \mathfrak{M}_K v_2$. Im Innern von K ist $\mathfrak{M}_K v$ stetig, und wenn v auf der Peripherie von K stetig ist, so ist $\mathfrak{M}_K v$ in K bekanntlich diejenige eindeutig bestimmte Funktion, die im Innern von K harmonisch ist und sich stetig an die Peripheriewerte von v anschließt. Hiernach ist nun die obige Bedingung II völlig gleichbedeutend mit der folgenden:

IIa. *Im Gebiet G ist für jeden Kreis K*

$$u = \mathfrak{M}_K u.$$

Um nun eine Funktion u zu gewinnen, die den Bedingungen I und IIa genügt, stellen wir folgende Definitionen auf:

Jede im abgeschlossenen Bereich $G + R$ stetige Funktion φ, die den Ungleichungen genügt

$$\varphi \leqq f \quad \textit{auf dem Rand } R,$$
$$\varphi \leqq \mathfrak{M}_K \varphi \quad \textit{für jeden Kreis } K,$$

heißt eine Unterfunktion.

---

[2]) Unter einem Kreis wird in dieser Arbeit stets nur ein solcher verstanden, der mit Einschluß der Peripherie ganz dem Gebiet G angehört; diese Einschränkung wird später nicht mehr besonders hervorgehoben.

Jede im abgeschlossenen Bereich $G + R$ stetige Funktion ψ, die den Ungleichungen genügt

$$\psi \geqq \bar{f} \quad \textit{auf dem Rand } R,$$
$$\psi \geqq \mathfrak{M}_K \psi \quad \textit{für jeden Kreis } K,$$

heißt eine Oberfunktion.

Offenbar ist jede Konstante, die höchstens gleich der unteren Grenze von f ist, eine Unterfunktion; es gibt also Unterfunktionen, und ebenso gibt es auch Oberfunktionen. Ist φ eine Unterfunktion, ψ eine Oberfunktion, und setzt man $\psi - \varphi = \omega$, so ist

(a) $\omega \geqq 0$ auf dem Rand R,

(b) $\omega \geqq \mathfrak{M}_K \omega$ für jeden Kreis K.

Aus (b) schließt man in bekannter Weise, daß das Minimum der in $G + R$ stetigen Funktion ω auf dem Rand R liegt, also nach (a) nicht negativ ist. Daher ist überall $\psi - \varphi \geqq 0$, also *jede Oberfunktion mindestens so groß wie jede Unterfunktion.*

Infolgedessen hat für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ von $G + R$ die Menge aller Oberfunktionen $\psi(\mathfrak{x})$ eine endliche untere Grenze $u(\mathfrak{x})$, und $u(\mathfrak{x})$ ist in $G + R$ beschränkt. *Wir wollen beweisen, daß die so definierte Funktion $u(\mathfrak{x})$ unter gewissen sehr allgemeinen Voraussetzungen die Randwertaufgabe löst, d. h. die in* I *und* IIa *geforderten Eigenschaften hat.*

§ 2.

Zwei Hilfssätze über Oberfunktionen.

Hilfssatz 1. *Sind n Oberfunktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ gegeben, so ist auch*

$$\psi = \operatorname{Min}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$$

eine Oberfunktion.

Beweis. Zunächst ist ψ selbstverständlich in $G + R$ stetig; außerdem ist auf dem Rand R

$$\psi_1 \geqq \bar{f}, \ \psi_2 \geqq \bar{f}, \ \ldots, \ \psi_n \geqq \bar{f},$$

also auch $\psi \geqq f$. Ist sodann $\mathfrak{x}$ ein Punkt von $G + R$, so gibt es einen Index ν derart, daß

$$\psi(\mathfrak{x}) = \operatorname{Min}(\psi_1(\mathfrak{x}), \ldots, \psi_n(\mathfrak{x})) = \psi_\nu(\mathfrak{x}).$$

Aber weil ψ_ν eine Oberfunktion, und weil $\psi_\nu \geqq \psi$, so ist für jeden Kreis K

$$\psi_\nu(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K \psi_\nu(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K \psi(\mathfrak{x}).$$

Also ist nach vorigem auch

$$\psi(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K \psi(\mathfrak{x}),$$

womit ψ als Oberfunktion erkannt ist.

Hilfssatz 2. *Ist ψ eine Oberfunktion und K ein Kreis, so ist auch $\mathfrak{M}_K \psi$ eine Oberfunktion.*

Beweis. Man setze

$$\mathfrak{M}_K \psi = \chi.$$

Da ψ als Oberfunktion in $G + R$ stetig ist, so ist auch χ in $G + R$ stetig. Ferner ist nach der Definition des Zeichens $\mathfrak{M}_K$ zunächst auf dem Rand R

$$\chi = \psi \geqq f.$$

Nun muß nur noch gezeigt werden, daß für jeden Kreis L

$$\chi \geqq \mathfrak{M}_L \chi$$

ist oder ausführlicher, wenn $\mathfrak{x}$ einen beliebigen Punkt von $G + R$ bedeutet:

(1) $$\chi(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_L \chi(\mathfrak{x}).$$

Liegt $\mathfrak{x}$ außerhalb oder auf der Peripherie von L, so ist diese Ungleichung schon nach der Definition des Zeichens $\mathfrak{M}_L$ erfüllt und zwar mit dem Gleichheitszeichen. Liegt $\mathfrak{x}$ außerhalb oder auf der Peripherie von K, so ist nach der Definition des Zeichens $\mathfrak{M}_K$

$$\chi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{M}_K \psi(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{x}).$$

Beachtet man, daß außerdem in $G + R$, weil ψ eine Oberfunktion ist,

$$\chi = \mathfrak{M}_K \psi \leqq \psi,$$

also $\chi \leqq \psi$ und folglich auch

$$\mathfrak{M}_L \chi(\mathfrak{x}) \leqq \mathfrak{M}_L \psi(\mathfrak{x})$$

ist, so ergibt sich weiter:

$$\chi(\mathfrak{x}) - \mathfrak{M}_L \chi(\mathfrak{x}) \geqq \psi(\mathfrak{x}) - \mathfrak{M}_L \psi(\mathfrak{x}) \geqq 0.$$

Daher ist wieder die Ungleichung (1) erfüllt.

Jetzt bleibt nur noch der Fall übrig, daß die Kreise K und L innere Punkte gemein haben, und daß $\mathfrak{x}$ ein solcher gemeinsamer Punkt ist. Nun ist aber $\chi = M_K \psi$ im Innern von K harmonisch, und $\mathfrak{M}_L \chi$ ist im Innern von L harmonisch. Also ist die Differenz

(2) $$\chi - \mathfrak{M}_L \chi$$

im Innern des den Kreisen K und L gemeinsamen Bereiches KL harmonisch. Auf der Peripherie von L verschwindet die Funktion (2) nach der Definition des Zeichens $\mathfrak{M}_L$. Auf der Peripherie von K ist

$$\chi = \mathfrak{M}_K \psi = \psi,$$

und da, wie schon vorhin bemerkt, überall $\chi \leqq \psi$, also auch

$$\mathfrak{M}_L \chi \leqq \mathfrak{M}_L \psi$$

ist, so ist auf der Peripherie von K

$$\chi - \mathfrak{M}_L \chi \geqq \psi - \mathfrak{M}_L \psi \geqq 0,$$

die Funktion (2) also $\geqq 0$. Die im Innern von KL harmonische Funktion (2) ist also auf dem Rand von KL überall $\geqq 0$. Da sie aber auf dem Rand von KL noch stetig ist (sie ist nämlich in $G + R$ überall stetig), so folgt bekanntlich, daß sie auch im Innern noch $\geqq 0$ sein muß. Es ist also

$$\chi(\mathfrak{x}) - \mathfrak{M}_L \chi(\mathfrak{x}) \geqq 0,$$

und somit die Ungleichung (1) wiederum erfüllt.

Bemerkung. Entsprechende Hilfssätze gelten natürlich auch für Unterfunktionen:

1. Sind n Unterfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ gegeben, so ist auch

$$\varphi = \mathrm{Max}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

eine Unterfunktion.

2. Ist φ eine Unterfunktion und K ein Kreis, so ist auch $\mathfrak{M}_K \varphi$ eine Unterfunktion.

§ 3.

Nachweis, daß u in G harmonisch ist.

Hilfssatz 3. *Ist F eine im Bereich $G + R$ stetige Funktion und ist überall $u \leqq F$, so ist für jeden Kreis K auch $u \leqq \mathfrak{M}_K F$.*

Beweis. Man erinnere sich, daß u als untere Grenze aller Oberfunktionen definiert ist. Wenn also $\mathfrak{x}$ ein Punkt von $G + R$ und ε eine beliebig kleine positive Zahl ist, so gibt es eine Oberfunktion $\psi_\mathfrak{x}$ derart, daß

$$u(\mathfrak{x}) > \psi_\mathfrak{x}(\mathfrak{x}) - \varepsilon$$

ist (natürlich hängt $\psi_\mathfrak{x}$ auch von ε ab). Wegen $u \leqq F$ ist also auch

$$F(\mathfrak{x}) > \psi_\mathfrak{x}(\mathfrak{x}) - \varepsilon.$$

Wegen der Stetigkeit von F und $\psi_\mathfrak{x}$ gilt daher die Ungleichung

$$F > \psi_\mathfrak{x} - \varepsilon$$

auch in einer gewissen Umgebung $U_\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{x}$. Somit erscheint jedem Punkt $\mathfrak{x}$ der beschränkten abgeschlossenen Menge $G + R$ eine Umgebung $U_\mathfrak{x}$ zugeordnet. Nach dem Heine-Borel-Theorem kann man aus ihnen endlich viele Umgebungen

$$U_{\mathfrak{x}_1}, U_{\mathfrak{x}_2}, \ldots, U_{\mathfrak{x}_n}$$

aussondern, die bereits die ganze Menge $G + R$ überdecken. Den n Punkten $\mathfrak{x}_\nu$ entsprechen dann in obiger Weise n Oberfunktionen $\psi_{\mathfrak{x}_\nu}$, und wenn man

$$\mathrm{Min}\,(\psi_{\mathfrak{x}_1}, \psi_{\mathfrak{x}_2}, \ldots, \psi_{\mathfrak{x}_n}) = \psi$$

setzt, so ist nach Hilfssatz 1 auch ψ eine Oberfunktion. Da jeder Punkt $\mathfrak{y}$ von $G + R$ einer Umgebung $U_{\mathfrak{x}_\nu}$ angehört, ist

$$F(\mathfrak{y}) > \psi_{\mathfrak{x}_\nu}(\mathfrak{y}) - \varepsilon \geqq \psi(\mathfrak{y}) - \varepsilon.$$

Ist nun K ein Kreis, und setzt man $\mathfrak{M}_K \psi = \chi$, so ist nach Hilfssatz 2 auch χ eine Oberfunktion, und aus der vorigen Ungleichung folgt:

$$\mathfrak{M}_K F > \mathfrak{M}_K \psi - \varepsilon = \chi - \varepsilon.$$

Da χ eine Oberfunktion, und da u die untere Grenze aller Oberfunktionen, so ist also erst recht

$$\mathfrak{M}_K F > u - \varepsilon,$$

und da ε beliebig klein sein darf, so folgt hieraus:

$$\mathfrak{M}_K F \geqq u. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Der Beweis, daß u in G harmonisch ist, gestaltet sich nun folgendermaßen. Wie beim Beweis von Hilfssatz 3 gibt es, wenn $\mathfrak{x}$ einen Punkt von $G + R$ und ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet, eine Oberfunktion $\psi_{\mathfrak{x}}$ derart, daß

$$u(\mathfrak{x}) > \psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}) - \varepsilon.$$

Ist also $\mathfrak{x}_1$ ein in $G + R$ gelegener hinreichend naher Nachbarpunkt von $\mathfrak{x}$, so ist, da $\psi_{\mathfrak{x}}$ als Oberfunktion stetig ist, auch

$$u(\mathfrak{x}) > \psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}_1) - \varepsilon,$$

und daher erst recht, weil u die untere Grenze aller Oberfunktionen ist,

$$u(\mathfrak{x}) > u(\mathfrak{x}_1) - \varepsilon.$$

Das besagt aber, *daß die Funktion u nach oben halbstetig ist.* Daher läßt sie sich als Grenzwert einer monoton abnehmenden Folge von *stetigen* Funktionen F_ν darstellen:

$$u = \lim_{\nu \to \infty} F_\nu,$$

wobei also $F_\nu \geqq F_{\nu+1}$ und $u \leqq F_\nu$ ist[3]). Nach Hilfssatz 3 ist dann für jeden Kreis K auch

$$u \leqq \mathfrak{M}_K F_\nu,$$

[3]) Carathéodory, C.: Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin 1918, Seite 402. Vermutlich kann man auch ohne diesen Satz auskommen und u direkt als Grenzwert einer monoton abnehmenden Folge von *Oberfunktionen* darstellen. Diese Darstellung, die mir leider nicht gelungen ist, hätte den weiteren Vorteil, daß dann der Hilfssatz 3 entbehrlich würde.

und da die F_ν offenbar gleichmäßig beschränkt sind (alle sind $\leqq F_1$ und $\geqq u$), so folgt hieraus nach einem Lebesgueschen Satz über die Integration eines Grenzwertes, indem man zur Grenze $\nu \to \infty$ übergeht:

$$u \leqq \mathfrak{M}_K u . \tag{3}$$

Dabei kann der in dem Zeichen $\mathfrak{M}_K u$ steckende Integrationsprozeß zunächst nur im Lebesgueschen Sinne aufgefaßt werden, da ja die Stetigkeit von u noch nicht bewiesen ist.

Andererseits ist aber, wenn ψ_ξ und ε wieder die obige Bedeutung haben,

$$u(\xi) > \psi_\xi(\xi) - \varepsilon ,$$

und, weil ψ_ξ eine Oberfunktion ist,

$$\psi_\xi(\xi) \geqq \mathfrak{M}_K \psi_\xi(\xi) \geqq \mathfrak{M}_K u(\xi);$$

also ist auch $u(\xi) > \mathfrak{M}_K u(\xi) - \varepsilon$, und da ε beliebig klein sein darf, so schließt man hieraus:

$$u(\xi) \geqq \mathfrak{M}_K u(\xi). \tag{4}$$

Aus (3) und (4) ergibt sich aber die Gleichung

$$u = \mathfrak{M}_K u .$$

Also erfüllt u die Bedingung IIa, *d. h. u ist in G harmonisch.*

§ 4.

Nachweis, daß u unter einer gewissen Voraussetzung auch die Randbedingungen erfüllt.

Um nun den Beweis zu vollenden, daß u eine Lösung der in § 1 formulierten Randwertaufgabe ist, muß nur noch gezeigt werden, daß u auch die beiden Randbedingungen

$$\underline{u} \geqq f, \qquad \bar{u} \leqq f$$

auf dem Rand R erfüllt. Dazu machen wir vorläufig die folgende

Voraussetzung A. *Ist* $\mathfrak{r}$ *ein beliebiger Punkt des Randes* R, *und* $U_\mathfrak{r}$ *eine beliebig kleine Umgebung*[4]) *von* $\mathfrak{r}$, *so gibt es eine in* $G + R$ *stetige Funktion* w, *die den vier Bedingungen genügt*:

1. $w(\mathfrak{r}) = 0$,
2. $w \geqq 0$ *in* $U_\mathfrak{r}$,
3. *Außerhalb* $U_\mathfrak{r}$ *bleibt* w *über einer positiven Schranke*,
4. $w \geqq \mathfrak{M}_K w$ *für jeden Kreis* K.

[4]) Selbstverständlich verstehen wir unter einer Umgebung von $\mathfrak{r}$ allemal nur den Teil einer *vollen* Umgebung, der zu $G + R$ gehört. Sie ist unter Umständen nicht zusammenhängend.

Hierzu beachte man für später, daß die vierte Bedingung sicher dann erfüllt ist (nämlich mit dem Gleichheitszeichen), wenn w in G harmonisch, also wenn w gleich dem reellen Teil einer in G analytischen Funktion von $x + iy$ ist.

Bedeutet jetzt ε eine beliebig kleine positive Zahl, so kann man in Voraussetzung A die Umgebung $U_\mathfrak{r}$ so klein wählen, daß für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ des Durchschnitts $RU_\mathfrak{r}$

$$\underline{f}(\mathfrak{r}) - \varepsilon < \underline{f}(\mathfrak{x}) \leqq \bar{f}(\mathfrak{x}) \leqq \bar{f}(\mathfrak{r}) + \varepsilon$$

ist. Dann erkennt man leicht, daß die Funktion

$$\varphi_1 = \underline{f}(\mathfrak{r}) - \varepsilon - Cw, \tag{5}$$

wenn nur die positive Konstante C genügend groß gewählt wird, eine Unterfunktion ist. Ebenso ist

$$\psi_1 = \bar{f}(\mathfrak{r}) + \varepsilon + Cw \tag{6}$$

eine Oberfunktion.

Da nach (5) insbesondere $\varphi_1(\mathfrak{r}) = \underline{f}(\mathfrak{r}) \quad \varepsilon$, so gibt es eine Umgebung $U_\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{r}$ derart, daß für jeden Punkt $\mathfrak{x}'$ von $U_\mathfrak{r}'$

$$\varphi_1(\mathfrak{x}') \geqq \underline{f}(\mathfrak{r}) - 2\varepsilon$$

ist. Da jede Oberfunktion mindestens so groß ist wie jede Unterfunktion, so ist auch die untere Grenze u mindestens so groß wie jede Unterfunktion, und aus der vorigen Ungleichung folgt:

$$u(\mathfrak{x}') \geqq \underline{f}(\mathfrak{r}) - 2\varepsilon.$$

Also ist auch

$$\underline{u}(\mathfrak{r}) \geqq \underline{f}(\mathfrak{r}) - 2\varepsilon,$$

und da ε beliebig klein sein darf, schließt man hieraus:

$$\underline{u}(\mathfrak{r}) \geqq \underline{f}(\mathfrak{r}).$$

Die erste Randbedingung ist also erfüllt.

Noch einfacher ist das Erfülltsein der zweiten zu beweisen. Da nach (6) nämlich $\psi_1(\mathfrak{r}) = \bar{f}(\mathfrak{r}) + \varepsilon$, so gibt es eine Umgebung $U_\mathfrak{r}''$ von $\mathfrak{r}$ derart, daß für jeden Punkt $\mathfrak{x}''$ von $U_\mathfrak{r}''$

$$\psi_1(\mathfrak{x}'') \leqq \bar{f}(\mathfrak{r}) + 2\varepsilon$$

ist. Daher wird erst recht

$$u(\mathfrak{x}'') \leqq \bar{f}(\mathfrak{r}) + 2\varepsilon,$$

und folglich auch

$$\bar{u}(\mathfrak{r}) \leqq \bar{f}(\mathfrak{r}) + 2\varepsilon$$

sein. Da aber ε beliebig klein sein darf, so schließt man hieraus:

$$\bar{u}(\mathfrak{r}) \leqq \bar{f}(\mathfrak{r}).$$

Die zweite Randbedingung ist also ebenfalls erfüllt. Übrigens kann man bemerken, daß die zweite Randbedingung immer mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist. Denn für jede Oberfunktion ψ ist ja definitionsgemäß $\psi(\mathfrak{r}) \geqq \bar{f}(\mathfrak{r})$; also wird auch $u(\mathfrak{r}) \geqq \bar{f}(\mathfrak{r})$, und folglich erst recht $\bar{u}(\mathfrak{r}) \geqq \bar{f}(\mathfrak{r})$ sein; daher schließlich:

$$\bar{u}(\mathfrak{r}) = \bar{f}(\mathfrak{r}).$$

Damit ist nun der Existenzbeweis für eine Lösung der in § 1 *formulierten Randwertaufgabe, ohne das geringste über den Rand R vorauszusetzen, zurückgeführt auf die Erfüllung der Voraussetzung* A, *deren Inhalt allerdings selbst wieder ein Existenzsatz ist, aber ein viel einfacherer als der ursprüngliche.*

Das gilt übrigens nicht nur für das ebene Problem, auf das wir uns beschränkt haben, sondern ebenso für das räumliche. Der Beweis bleibt der gleiche; nur muß an Stelle des ebenen Gebietes G natürlich ein räumliches treten; an Stelle der Kreise treten Kugeln, und an Stelle der ebenen Poissonschen Integrale treten räumliche.

§ 5.

Spezielle Annahmen über den Rand R.

Funktionen der in Voraussetzung A verlangten Art sind bei geeigneter Beschaffenheit des Randes leicht anzugeben. Sei z. B. das Gebiet G schlicht, und der Rand R eine Jordankurve. Ist dann $\mathfrak{r}$ ein beliebiger Punkt von R, so machen wir ihn zunächst durch Parallelverschiebung zum Koordinatenanfangspunkt, und sodann sorgen wir durch Maßstabsänderung dafür, daß in $G + R$ dauernd $x^2 + y^2 < 1$ ist[5]). Dann ist die Funktion

$$\log(x + iy) = p + iq$$

in $G + R$, abgesehen vom Anfangspunkt $\mathfrak{r}$, eindeutig und analytisch, und wegen $x^2 + y^2 < 1$ ist $p < 0$. In der Umgebung von $\mathfrak{r}$ aber ist ihr absoluter Betrag beliebig groß. Der reelle Teil von

$$\frac{-1}{\log(x+iy)}, \tag{7}$$

also die Funktion

$$w = \frac{-p}{p^2+q^2} \tag{8}$$

hat daher, wenn wir ihr im Punkt $\mathfrak{r}$ den Wert Null beilegen, die in Voraussetzung A geforderten Eigenschaften.

[5]) Man beachte, daß ja durch solche Transformationen die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ in sich übergeht.

Sei allgemeiner das Gebiet G wieder schlicht, aber von mehreren, und zwar endlich vielen Jordankurven berandet (also mehrfach zusammenhängend). Ist dann $\mathfrak{r}$ ein Punkt der *äußeren* Randkurve, so kann man genau wie oben verfahren. Ist aber $\mathfrak{r}$ ein Punkt einer *inneren* Randkurve, so kann man diese zunächst durch eine lineare Transformation[5]) der komplexen Variablen $x + iy$ zur äußeren machen und dann wieder wie oben verfahren.

§ 6.

Allgemeinere Annahmen über den Rand.

Das in § 5 angewandte Verfahren kann nie zum Ziel führen, wenn der Rand R verschiedene Punkte mit gleichen Koordinaten enthält, was beispielsweise bei nicht-schlichten Gebieten der Fall ist (Fig. 1 und 2), aber auch bei schlichten Gebieten schon vorkommen kann, z. B. in Fig. 3, wo gegenüberliegende Uferpunkte des Schnittes l als verschieden anzusehen sind. Dann würde nämlich die Funktion (7), also auch ihr reeller Teil (8) nicht nur im Randpunkt $\mathfrak{r}$ und allenfalls in einer beliebig kleinen Umgebung $U_\mathfrak{r}$ verschwinden, sondern auch in den anderen Randpunkten, die die gleichen Koordinaten wie $\mathfrak{r}$ haben; bei der Voraussetzung A war es aber wesentlich, daß w außerhalb $U_\mathfrak{r}$ über einer positiven Schranke bleibt, weil man sonst nicht schließen kann, daß die Funktion (5) eine Unterfunktion und die Funktion (6) eine Oberfunktion ist.

Fig. 3.

Diese Schwierigkeit wird sich in konkreten Fällen meistens durch eine einfache konforme Abbildung[5]) leicht beheben lassen. Man kann sie aber in größerem Umfang auch dadurch vermeiden, daß man die Voraussetzung A durch eine geringere ersetzt. *Die Voraussetzung* A *ist nämlich von selbst erfüllt, und folglich die Lösbarkeit der allgemeinen Randwertaufgabe sichergestellt, sobald die folgende geringere Voraussetzung* B *erfüllt ist.*

Voraussetzung B. *Ist* $\mathfrak{r}$ *ein beliebiger Punkt des Randes* R, *ferner* $U_\mathfrak{r}$ *eine hinreichend und beliebig kleine abgeschlossene Umgebung von* $\mathfrak{r}$, *so gibt es eine in* $U_\mathfrak{r}$ *stetige Funktion* Ω, *die den vier Bedingungen genügt*:

1. $\Omega(\mathfrak{r}) = 0$,
2. $\Omega \geqq 0$ *in* $U_\mathfrak{r}$,
3. $\Omega > 0$ *auf dem Rand von* $U_\mathfrak{r}$, *soweit er zu* G (*also nicht zu* R) *gehört, sowie in den Häufungspunkten dieser Menge,*
4. $\Omega \geqq \mathfrak{M}_L \Omega$ *für jeden Kreis* L *im Innern von* $U_\mathfrak{r}$.

Um das einzusehen, definieren wir in $G + R$ eine Funktion w durch die Formeln

$$w = \mathrm{Min}(C\Omega, 1) \text{ in } U_\mathfrak{r},$$
$$w = 1 \text{ außerhalb } U_\mathfrak{r},$$

wo C eine geeignet zu wählende positive Konstante ist, und zeigen, daß dann w die in Voraussetzung A geforderten Eigenschaften hat. In der Tat ist w in $G + R$ gewiß stetig, wenn nur C genügend groß [6]); außerdem ist

$$w(\mathfrak{r}) = 0,$$
$$w \geqq 0 \text{ in } U_\mathfrak{r},$$
$$w = 1 \text{ außerhalb } U_\mathfrak{r},$$

und somit muß nur noch gezeigt werden, daß für jeden Kreis K

$$w \geqq \mathfrak{M}_K w$$

ist, oder ausführlicher:

$$w(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K w(\mathfrak{x}). \tag{9}$$

Liegt $\mathfrak{x}$ außerhalb oder auf der Peripherie von K, so ist die Ungleichung (9) nach der Definition des Zeichens $\mathfrak{M}_K$ gewiß erfüllt (nämlich mit dem Gleichheitszeichen). Liegt $\mathfrak{x}$ außerhalb $U_\mathfrak{r}$, so ist die linke Seite von (9) definitionsgemäß gleich 1; die rechte ist aber, weil ja überall $w \leqq 1$, also auch $\mathfrak{M}_K w \leqq 1$ ist, gewiß $\leqq 1$. Die Ungleichung (9) ist daher wieder erfüllt. Somit bleibt nur noch der Fall, daß $\mathfrak{x}$ ein Punkt des Durchschnitts $KU_\mathfrak{r}$ ist. Nun genügt die Funktion $\chi_1 = C\Omega$ für jeden Kreis L im Innern von $U_\mathfrak{r}$ definitionsgemäß der Ungleichung

$$\chi_1 \geqq \mathfrak{M}_L \chi_1.$$

Ferner ist die Funktion $\chi_2 = \mathfrak{M}_K w$ im Innern von K harmonisch, also ist für jeden Kreis L im Innern von K

$$\chi_2 = \mathfrak{M}_L \chi_2.$$

Setzt man daher

$$C\Omega - \mathfrak{M}_K w = \chi_1 - \chi_2 = X,$$

so ist für jeden Kreis L im Innern des Durchschnitts $KU_\mathfrak{r}$

$$X \geqq \mathfrak{M}_L X,$$

und außerdem ist X auf dem Rand von $KU_\mathfrak{r}$ noch stetig. Daraus schließt man aber, daß das Minimum der im abgeschlossenen Bereich $KU_\mathfrak{r}$ stetigen Funktion X auf dem Rand von $KU_\mathfrak{r}$ liegt.

[6]) w hat dann auch auf dem Rand von $U_\mathfrak{r}$, soweit er zu G gehört, sowie in den Häufungspunkten dieser Menge den Wert 1, so daß dort also $C\Omega \geqq 1$ ist. So groß muß eben C gewählt werden.

Aber auf dem Rand von K, soweit er zu $KU_\mathfrak{r}$ gehört, ist nach der Definition von w

$$C\Omega \geqq w = \mathfrak{M}_K w,$$

also

$$X = C\Omega - \mathfrak{M}_K w \geqq 0.$$

Auf dem Rand von $U_\mathfrak{r}$, soweit er zu $KU_\mathfrak{r}$ gehört, ist nach Fußnote [6]) $C\Omega \geqq 1$; also, da, wie schon oben bemerkt wurde, $\mathfrak{M}_K w \leqq 1$ ist,

$$X = C\Omega - \mathfrak{M}_K w \geqq 1 - 1 = 0.$$

Somit ist auf dem Rand von $KU_\mathfrak{r}$ überall $X \geqq 0$, und da das Minimum auf dem Rand liegt, ist auch im Innern von $KU_\mathfrak{r}$ überall $X \geqq 0$. Erinnert man sich an die Bedeutung des Zeichens X, so ist also, wenn $\mathfrak{x}$ einen beliebigen Punkt von $KU_\mathfrak{r}$ bedeutet,

$$C\Omega(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K w(\mathfrak{x}).$$

Anderseits ist, wie schon wiederholt bemerkt, $\mathfrak{M}_K w \leqq 1$, also

$$1 \geqq \mathfrak{M}_K w(\mathfrak{x}).$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen zusammen folgt aber:

$$w(\mathfrak{x}) = \operatorname{Min}(C\Omega(\mathfrak{x}), 1) \geqq \mathfrak{M}_K w(\mathfrak{x}).$$

Daher ist auch jetzt die Ungleichung (9) wieder erfüllt. Unsere Behauptung, daß mit der Voraussetzung B stets auch die Voraussetzung A erfüllt ist, ist damit vollständig bewiesen.

Hiernach läßt sich die in § 1 *formulierte Randwertaufgabe z. B. immer lösen, wenn zu jedem Punkt* $\mathfrak{r}$ *des Randes* R *eine abgeschlossene Umgebung* [7]) $U_\mathfrak{r}$ *existiert, in welcher man den Punkt* $\mathfrak{r}$ *nicht umlaufen kann.*

In der Tat behält $U_\mathfrak{r}$ diese Eigenschaft bei Verkleinerung offenbar bei, so daß man $U_\mathfrak{r}$ beliebig klein wählen kann. Alsdann ist wie in § 5 nur nötig, den Punkt $\mathfrak{r}$ durch Parallelverschiebung zum Koordinatenanfangspunkt zu machen und dafür zu sorgen (durch Maßstabsänderung oder einfacher durch Verkleinerung von $U_\mathfrak{r}$), daß in $U_\mathfrak{r}$ überall $x^2 + y^2 < 1$ ist. Setzt man jetzt wieder

$$\log(x + iy) = p + iq,$$

so hat die Funktion

$$\Omega = \frac{-p}{p^2 + q^2}$$

in $U_\mathfrak{r}$ die in Voraussetzung B geforderten Eigenschaften.

Damit haben wir für die Berandung genau den gleichen Grad von Allgemeinheit erreicht, den auch die Herren Lebesgue, Courant,

[7]) Hier ist die Fußnote [4]) zu beachten.

Lichtenstein, jeder auf andere Art, erreicht haben[8]). Bezüglich der Art, wie die Funktion u gewonnen wird, ohne jede Konvergenzbetrachtung, dürfte unsere Methode die einfachste sein. Übrigens ist aber auch unsere Formulierung der Randwertaufgabe wesentlich allgemeiner.

Die Figuren 1, 2, 3 sind Beispiele von Rändern, welche unter die gegenwärtige Betrachtung fallen; auch Windungspunkte unendlich hoher Ordnung wären als Randpunkte zulässig. Dagegen fällt z. B. nicht unter diese Betrachtung ein Rand, der isolierte Punkte enthält. Denn in jeder Umgebung eines solchen Punktes r kann man r umlaufen, und daher ist der Logarithmus nicht eindeutig. Aber das ist kein Mangel der Methode; denn in diesem Fall hat die Randwertaufgabe im allgemeinen gar keine Lösung. Wenn z. B. das Gebiet G das Innere eines Kreises nach Wegnahme des Mittelpunktes ist, so beweist man in bekannter Weise, daß eine in G harmonische und auf dem Rand R von G noch stetige Funktion im Mittelpunkt (der jetzt zu R gehört) den arithmetischen Mittelwert aus den Peripheriewerten annimmt. Verlangt man also etwa, daß die in G harmonische Funktion auf der Peripherie gleich 1 und im Mittelpunkt gleich 0 ist, so hat diese Randwertaufgabe gewiß keine Lösung. Auf dieses Beispiel hat bereits früher Herr Zaremba[9]) hingewiesen.

---

[8]) Lebesgue, H.: Sur le problème de Dirichlet. Rendiconti del circolo matematico di Palermo **24** (1907), S. 371–402. — Courant, R.: Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie. Journal f. d. reine u. angew. Mathematik **144** (1914), S. 190–211. — Lichtenstein, L.: Encyklopädie der mathemat. Wissenschaften II C 3, S. 306 [vgl. auch Berichte der Berl. Math. Ges. **15** (1916), S. 92–96].

[9]) Vgl. Zaremba, S.: Sur le principe de Dirichlet. Acta mathematica **34** (1911), S. 293–316 (S. 310).

(Eingegangen am 18. September 1922.)

Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. I.

Von

E. Study in Bonn.

Inhalt.

§ 1. Einleitung.
§ 2. Die Nablafunktion.
§ 3. Lineare Transformationen einer Quaternion.
§ 4. Automorphe Kollineationen einer sphärischen Mannigfaltigkeit im R_5.

§ 1.

Einleitung.

Versteht man unter z eine (gewöhnliche) komplexe Veränderliche, $z = x + iy$, und, wie üblich, unter $\bar{z} = x - iy$ die zu z konjugiert-komplexe Zahl, so stellen bekanntlich Gleichungen der Form

$$(1) \qquad \frac{az+b}{cz+d} = z', \quad \frac{l\bar{z}+m}{n\bar{z}+r} = z'$$

(„*lineare*“ und „*quasi-lineare*“ Transformationen von z) zusammen die Gruppe aller „eigentlichen“ und „uneigentlichen“ reellen Transformationen dar, die in der Euklidischen Ebene $\{x, y\}$ aus Kreislinien wieder solche hervorgehen lassen. Es ist dabei anzunehmen, daß

$$(2) \qquad ad - bc \neq 0, \quad lr - mn \neq 0$$

ist. Ferner ist (abweichend vom Verfahren der projektiven Geometrie) das nach dem Unendlichen hin offene Kontinuum der Punkte (x, y) oder z — die fortan *eigentliche Punkte* heißen — durch Einführung *eines* „*uneigentlichen Punktes*“ $(z = \infty)$ abzuschließen. Entsprechend sind andere Begriffe zu fassen. Namentlich ist der Begriff Kreislinie so zu umgrenzen, daß er den Begriff eines (reellen) geraden Linienzugs nicht aus-, sondern einschließt: Eine Gerade ist eine Kreislinie, die den uneigent-

lichen Punkt enthält. In dem erklärten Punktkontinuum — der „Gaußschen Ebene“ oder „Zahlenebene“ — sind dann die Transformationen (1), die wir (reelle) *Möbiussche Transformationen* nennen wollen, überall definiert und eindeutig-umkehrbar. Sie sind ferner stetig und konform, soweit die einander zugeordneten reellen Punkte z und z' eigentliche Punkte bleiben. Auf Grund naheliegender weiterer Festsetzungen können sie dann noch als *überall* stetig und konform erklärt werden, so daß eine Theorie entsteht, die an Einfachheit ihrer Formulierungen hinter der von den Geometern mehr gepflegten ebenen Geometrie im reellen projektiven Punktkontinuum nicht zurückbleibt, ja sie in gewisser Hinsicht übertrifft (Ausnahmslosigkeit gewisser Lehrsätze: Fundamentalsatz der Algebra). Den Punkten z kann man durch die Umkehrung einer stereographischen Projektion Punkte einer Kugelfläche — der „Riemannschen Kugel“ oder „Zahlenkugel“ zuordnen[1]); die Gleichungen (1) liefern dann Transformationen der Punkte dieser Kugelfläche, die schon im gewöhnlichen Sinne der Worte überall definiert, stetig, umkehrbar-eindeutig und konform sind, und überdies in das dreidimensionale projektive Punktkontinuum hinein als Kollineationen fortgesetzt werden können. Es entstehen so alle reellen automorphen Kollineationen der eingeführten Kugel, oder, mit leichter Erweiterung, es entstehen die reellen automorphen Kollineationen irgendeiner reellen Fläche 2. Ordnung vom Trägheitsindex 1. Die zur Möbiusschen Gruppe (1) gehörigen Äquivalenzbegriffe und die der genannten Kollineationsgruppe entsprechen einander wechselweise. Doch ist zu beachten, daß Punkte der Flächen 2. Ordnung hier rational-bekannt sind, und daß man überdies auch ihre beiden Scharen von imaginären Erzeugenden rational trennen kann. Das ermöglicht eine besonders einfache Behandlung des Stoffs. Verwickeltere Figuren wird man in dieser Theorie aus solchen entstehen lassen, die von Punkten auf der genannten Fläche 2. Ordnung gebildet werden: Man braucht nicht erst eine quadratische Gleichung zu lösen, um zu solchen Punkten zu kommen.

Alles das ist gegenwärtig wohlbekannt. Und bekannt genug ist es auch, daß vieles von dem Gesagten sich auf eine unbestimmte Dimensionenzahl n übertragen läßt. Man kann das Kontinuum der reellen Punkte $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ eines n-dimensionalen Euklidischen Raumes R_n durch einen uneigentlichen Punkt abschließen und dann das so erweiterte,

[1]) Es entsteht hieraus die Forderung, den projektiv-invarianten Konstruktionen mit dem Lineal ebenfalls „lineare“ Konstruktionen gegenüberzustellen, die auf der Kugelfläche oder in der Gaußschen Ebene verlaufen, und von den Möbiusschen Transformationen mitgenommen, in gleichartige Konstruktionen übergeführt werden. Das Hilfsmittel dazu ist nicht der Zirkel, sondern *das Kreislineal*. Math. Ann. **49** (1897), S. 428 u. ff.

nunmehr „*Möbiussche*“ *Kontinuum* mit Hilfe einer stereographischen Projektion eindeutig umkehrbar und *überall* „stetig“ und „konform“ auf den reellen Zug einer sphärischen Mannigfaltigkeit M_n^2 eines Raumes R_{n+1} abbilden, oder überhaupt auf den reellen Zug irgendeiner reellen M_n^2 vom Trägheitsindex 1. Sphärische Mannigfaltigkeiten aller möglichen Dimensionenzahlen im Möbiusschen Kontinuum (zu denen auch die ebenen Mannigfaltigkeiten zu rechnen sind), entsprechen dann sphärische Mannigfaltigkeiten auf der M_n^2, oder, allgemeiner, es entsprechen ihnen ebene Schnitte der M_n^2. Diese Teilkontinua werden untereinander vertauscht durch eine geschichtete Gruppe[2]) von

$$2 \cdot \infty^N = 2 \cdot \infty^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

überall eindeutigen und stetigen reellen Punkttransformationen, die alle auch konform sind, und von uns als (reelle) *eigentliche und uneigentliche Möbiussche Transformationen* unterschieden werden sollen: Die eigentlichen Transformationen der Gruppe bilden das (in ihr invariant enthaltene) Kontinuum, das die identische Transformation umfaßt. Im Gebiete R_{n+1} wird durch die umfassendere Gruppe die Gruppe aller reellen automorphen Kollineationen der M_n^2 induziert.

Es besteht hiernach eigentlich gar kein wesentlicher Unterschied zwischen dem Möbiusschem Kontinuum $(x_0 \ldots x_{n-1})$ und dem sphärischen Kontinuum M_n^2. Beide sind durch die stereographische Projektion vollkommen eindeutig aufeinander und zwar so abgebildet, daß die zugehörigen Gruppen, und also auch die diesen Gruppen entsprechenden Arten von Geometrie ineinander übergehen. Man hat es im Grunde immer mit derselben Tatsache zu tun, mag man sie nun in dieser oder in jener Sprache darstellen. Indessen tritt dieser Stoff das eine Mal in Beziehung zur Euklidischen Geometrie im Raume R_n, das andere Mal zur projektiven im Raume R_{n+1}. Entsprechend bieten sich auch verschiedene Methoden dar, deren gegenseitiges Verhältnis einer besonderen Untersuchung bedarf. Daher wird es nicht unzweckmäßig sein, zwei Termini, *Möbiussches Kontinuum* und *sphärisches Kontinuum*, zur Verfügung zu haben.

Ist dieses alles vollkommen analog zu dem, was es schon im Falle $n = 2$ gibt, so bringt natürlich die höhere Dimensionenzahl doch auch allerlei Neues mit sich.

1. Ist $n > 2$, so fällt die besondere Geschlossenheit weg, die der Theorie der eigentlichen Transformationen der Gruppe (1) zukommt, und im Fundamentalsatze der Algebra ihren einfachsten Ausdruck findet.

---

[2]) Nach Lies Terminologie: Gemischte Gruppe. Nach der hier vorgeschlagenen Ausdrucksweise kann man auch von *Schichten* (Hauptschicht, Nebenschichten) einer aus mehreren Kontinuis bestehenden Gruppe sprechen.

2. Ist $n > 2$, so erschöpfen nach einem wichtigen (wenn ich nicht irre, von Liouville herrührenden) Lehrsatz die Möbiusschen Transformationen schon alle (reellen) konformen Abbildungen auf der Mannigfaltigkeit M_n^2, oder also, sie erschöpfen die konformen Transformationen im Möbiusschen Kontinuum.

Wenn wir es nur mit den Fällen $n > 2$ zu tun haben, so werden wir daher statt von „Möbiusschen Transformationen" von *konformen Transformationen* reden können.

3. Weitere durch die verschiedenen Werte der Zahl n bedingte Unterschiede zeigen sich, wenn wir nunmehr die betrachteten Kontinua von Punkten und Transformationen durch Hinzunahme *imaginärer Figuren* erweitern, was in den Fällen $n > 2$ für eine erfolgreiche Anwendung der Algebra unerläßlich und übrigens auch im Falle $n = 2$ nicht überflüssig ist.

Im Falle der sphärischen Mannigfaltigkeit M_n^2 werden „komplexe Punkte" in bekannter Weise durch homogene *komplexe* Koordinaten definiert, und in das erweiterte Gebiet hinein werden die betrachteten Transformationenscharen analytisch festgesetzt. Alle Dimensionenzahlen werden verdoppelt[3]). Die nicht-homogenen Punktkoordinaten $z_0 \ldots z_{n-1}$, die zu dem Möbiusschen Kontinuum gehören, bieten sich jedoch zu einer parallel laufenden Erweiterung nur in beschränktem Umfange dar. Schon im Falle $n = 2$ laufen ja auf der M_2^2, der Riemannschen Kugel, durch das Projektionszentrum zwei (imaginäre) gerade Linien, deren imaginäre Punkte sich der Darstellung durch die komplexen Koordinaten z_0, z_1 entziehen. Die in das komplexe Gebiet von z_0, z_1 erweiterten beiden Mannigfaltigkeiten Möbiusscher Transformationen erhalten dadurch verwickelte Eigenschaften: Diese Transformationen sind fast alle mit singulären Stellen behaftet. Ganz vermeiden läßt sich derartiges nicht, aber man kann wenigstens die Einfachheit der Begriffsbildungen wahren, wenn man sich entschließt, als Koordinaten auch im Möbiusschen Kontinuum die homogenen Koordinaten zu betrachten, die zu dem Raume R_{n+1} gehören, und durch eine quadratische Gleichung (eigentlich durch ein Paar von Gleichungen), nämlich durch die Gleichung der M_n^2 verbunden sind, und wenn man dann noch die Erweiterung *auch des Möbiusschen Kontinuums* dadurch definiert, daß man den homogenen Koordinaten komplexe Werte erteilt[4]).

---

[3]) Das sollte eigentlich auch in der Bezeichnung zum Ausdruck kommen. Indessen ist es nicht üblich, und allzu viele Neuerungen will ich nicht einführen. Ich rede also nach wie vor von einer M_n^2, nicht, wie die Konsequenz es verlangen würde, von einer M_{2n}^2.

[4]) Die Grundsätze, nach denen solche Begriffsbildungen zu erfolgen haben, habe ich in § 27 meines Buches „Geometrie der Dynamen" (Leipzig 1913) dargelegt. (Begriff der zu einer analytischen Gruppe gehörigen *natürlichen Kontinua*.)

Der Begriff des erweiterten Möbiusschen Kontinuums, wie er hier gefaßt werden soll, ist dann von dem eines (erweiterten) sphärischen Kontinuums nicht wesentlich verschieden; aber abweichend vom Verhalten des reellen Gebietes wird nun im Komplexen das „Möbiussche Kontinuum" durch Kartesische Koordinaten $z_0 \dots z_{n-1}$ nur in sehr lückenhafter Weise dargestellt.

Übrigens werde ich fernerhin in der Regel nicht mehr von einem „erweiterten" (Möbiusschen oder sphärischen) Kontinuum reden, sondern z. B. unter dem „sphärischen Kontinuum" M_n^2 eben das erweiterte verstehen, unter Änderung der Eingangs erklärten Terminologie. Ich verfahre also so, wie man allgemein in der projektiven Geometrie verfährt, wo ein Punkt oder eine Kurve auch nicht notwendig eine reelle Figur ist, ausgenommen in Schriften für Anfänger. Wo nur reelle Figuren (Punkte, Transformationen und anderes) betrachtet werden sollen, da wird es ausdrücklich gesagt werden.

Es findet sich nun, daß die Fälle eines ungeraden n eine weniger enge Analogie mit dem Falle $n = 2$ darbieten als die übrigen.

Ist nämlich $n \equiv 1 \pmod 2$, so gibt es im komplexen Gebiete ein einziges analytisches (und zwar rationales) Kontinuum konformer Transformationen, von $2N$ (besser N „komplexen") Dimensionen, das *zwei* reelle Züge hat — eben die zuvor besprochenen Scharen reeller Transformationen. Ist dagegen $n \equiv 0 \pmod 2$, so hat man zwei Kontinua konformer Transformationen (von der genannten Dimensionenzahl) und jedes hat nur *einen* reellen Zug. Im ersten Falle enthält die M_n^2 ein einziges Kontinuum von $\frac{(n+1)(n+3)}{8}$ komplexen Dimensionen linearer Räume $R_{\frac{n-1}{2}}$ der größtmöglichen Dimensionenzahl $\left(2 \cdot \frac{n-1}{2}\right)$, im zweiten zwei Kontinua von je $\frac{n(n+2)}{8}$ komplexen Dimensionen linearer Räume $R_{\frac{n}{2}}$ der größtmöglichen Dimensionenzahl $\left(2 \cdot \frac{n}{2}\right)$. Diese beiden Scharen linearer Räume sind *reell*, wenn $n \equiv 0 \pmod 4$ ist, und sie sind *konjugiert-imaginär*, wenn $n \equiv 2 \pmod 4$ ist. Das heißt, im ersten Falle liegt der lineare Raum $\bar{R}$, der zu einem gegebenen R konjugiert-imaginär ist, in derselben Schar, und im zweiten Falle liegt er in der anderen[5]).

[5]) Ich nenne mit C. Segre eine geometrische Figur *reell*, wenn sie die Transformation des Konjugiums zuläßt, wenn sie nämlich mit der konjugiert-komplexen Figur zusammenfällt. Danach gibt es z. B. zwei Arten reeller Punktepaare: Solche, deren einzelne Punkte reell sind, und solche, deren zwei Punkte konjugiert-imaginär sind. Nach dieser Definition, nicht aber nach der in Elementarbüchern üblichen, gehört zu einer reellen algebraischen Fläche im Raume der projektiven Geometrie immer ein reelles Polarsystem *und umgekehrt*.

Die Unterscheidung von *eigentlichen* und *uneigentlichen* konformen Transformationen erstreckt sich hiernach in den Fällen $n \equiv 0 \pmod 2$ auf das komplexe Gebiet, in den Fällen $n \equiv 1 \pmod 2$ aber nicht. Ist $n \equiv 0 \pmod 2$, so werden die zwei Scharen linearer Räume, von denen soeben die Rede war, durch die uneigentlichen konformen Transformationen der M_n^2 miteinander vertauscht.

4. Ist $n > 2$ und $\neq 4$, so kann aus der allgemeinen Theorie der komplexen Zahlen ein *engeres* Analogon zu den Formeln (1) nicht abgeleitet werden. Lassen wir nämlich jetzt a, b, c, d und z sogenannte höhere komplexe Zahlen bedeuten (Zahlen irgendeines Systems, das eine Haupteinheit enthält), so werden sich allerdings nach dem Muster von (1) Gruppen definieren lassen. Insbesondere erhält man nach Analogie der ersten Formel unter (1) eine analytische Gruppe, deren Transformationen im allgemeinen (wenn nämlich die Multiplikation des betrachteten Systems nicht kommutativ ist) durch zwei zu unterscheidende Formeln darstellbar sind:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &(az+b)(cz+d)^{-1} = z', \\ &(z\gamma+\delta)^{-1}(z\alpha+\beta) = z'. \end{aligned}$$ [6])

Aber auf diese Art wird man gewöhnlich nicht Möbiussche Gruppen erhalten, und nicht einmal Gruppen, deren Transformationen auch nur im Rellen frei sind von verwickelten Singularitäten. Solche werden nämlich auftreten müssen wegen der in fast allen Fällen vorhandenen (von Null verschiedenen) sogenannten Teiler der Null: Alle auf die genannte Art darstellbaren Transformationen müssen dann (wenn nicht noch weitere Einschränkungen hinzukommen) stark mit singulären Stellen behaftet sein, was natürlich die Brauchbarkeit derartiger Formeln sehr verringert [7]).

Eine Ausnahme von dem zuletzt Gesagten (und zwar, nach einem bekannten Satze von C. S. Peirce und Frobenius, die einzige) bildet nun der Fall $n = 4$. Tatsächlich kann man im reellen Möbiusschen Kontinuum von vier Dimensionen die daselbst vorhandenen $2 \cdot \infty^{15}$ konformen Transformationen mit Hilfe der reellen Quaternionen alle, und jede einzelne Transformation auch überall, durch Formeln darstellen, die nach dem Muster der Formeln (1) gebildet sind.

Hiermit ist das Thema der folgenden Untersuchung gegeben. Ohne Zweifel lohnt es sich, eine solche Analogie eine Strecke weit zu verfolgen.

[6]) Wenn nämlich die erste dieser Gleichungen nach z auflösbar ist, so hat die Auflösung die Form der zweiten Gleichung, und umgekehrt.

[7]) Nach meiner Terminologie ist dann das durch die Koordinaten $z_0, \ldots, z_{n-1}$ von z bestimmte Möbiussche Kontinuum nicht ein zur Gruppe gehöriges natürliches Kontinuum. (Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, § 27.)

Allerdings wird man zunächst wohl vermuten, daß der nicht-kommutative Charakter der Multiplikation im Falle der Quaternionen so wesentliche Unterschiede im Vergleich zu den gemeinen komplexen Zahlen bedingen muß, daß weitgehende Übereinstimmungen nicht zu erwarten sind. Eine genauere Untersuchung lehrt aber das Gegenteil, und dieser Umstand begründet das besondere Interesse, das ich diesem Gegenstand zuschreiben möchte. Hiermit will ich natürlich nur sagen, daß es vernünftig ist, eine genauere Untersuchung der nicht-projektiven Gruppen vom Typus (*) mit diesem einfachsten Fall zu beginnen. Fortsetzungen werden nach mehreren Richtungen hin möglich sein.

Mit dem zuletzt entwickelten Gedanken ist verwandt ein schon im Jahre 1883 von dem griechischen Geometer C. Stéphanos skizzierter Versuch, die Lieschen Transformationen orientierter Kugeln und die kollinearen Transformationen gerader Linien im gewöhnlichen Raume mit Hilfe der Quaternionen darzustellen. (Math. Ann. 22, S. 589.) Obwohl auch das Interesse haben kann, so wird doch zu bemerken sein, daß das unvermeidliche Auftreten der singulären Stellen in diesen beiden Fällen bedeutende und überflüssige Verwicklungen verursachen muß. Schon im reellen Gebiete ist es nämlich nicht möglich, die orientierten Kugeln und die geraden Linien durch vier Koordinaten derart darzustellen, daß sich nicht gleich unendlich viele dieser Figuren der Darstellung ganz entziehen. Man sieht das, wenn man die reellen orientierten Kugeln auf Punkte einer M_4^2 vom Trägheitsindex 2, und die reellen Geraden auf Punkte einer M_4^2 vom Trägheitsindex 3 (die Plückersche Mannigfaltigkeit) abbildet. Will man diese M_4^2 dann, durch Projektion aus je einem geeigneten ihrer Punkte, auf ein ebenes Kontinuum beziehen, so geht dabei jedesmal die Unterscheidung von ∞^3 Punkten verloren, die den Schnitt der M_4^2 mit dem Tangentialraum des Projektionszentrums erfüllen: ihnen entspricht in der Projektion nur ein einzelner Punkt*). Die reellen Züge der Mannigfaltigkeiten M_4^2 vom Trägheitsindex 1, 2 und 3 haben schon so verschiedene topologische Eigenschaften, daß man sie überhaupt nicht umkehrbar-stetig aufeinander abbilden kann.

Daß der griechische Geometer die Verwickelungen nicht gewürdigt hat, in die eine Ausführung seines Gedankens ihn hätte bringen müssen, kann verwunderlich erscheinen — waren doch gerade ihm, zufolge seiner Untersuchung über bilineare Formen, die Teiler der Null sehr geläufig. Aber wahrscheinlich hat unter den Geometern jener Zeit nicht ein einziger Wert auf Präzision gelegt.

Der viel näher liegende Gedanke, die konformen Transformationen im Raume von vier Dimensionen mit Hilfe der Quaternionen darzustellen, kann Stéphanos nicht fremd gewesen sein. Er wird ihn nicht formuliert haben, weil „Geometrie“ in einem Raume von vier Dimensionen zu seiner Zeit überhaupt sehr unbeliebt war. E. Cartan, der diesen Gedanken ausgesprochen hat (in der französischen Enzyklopädie, 1908, I, 5, S. 452), hat jedoch die zu (2) analoge Einschränkung nicht angegeben. Mir hat es scheinen wollen, daß hier nicht gerade nur ein „kleiner Schönheitsfehler“ vorliegt. Eben diese Lücke hat die Untersuchung veranlaßt, die ich nunmehr vorlege. Die zu ihrer Beseitigung eingeführte Funktion, die ich Nablafunktion

*) Ein einzelner Punkt des Möbiusschen Kontinuums. Bei Projektion in das Punktkontinuum der projektiven Geometrie wird auch noch das Projektionszentrum ein Punkt der Unbestimmtheit.

nenne, hat übrigens, wie ich glaube, ein selbständiges Interesse. Die Familie von Funktionen, zu der sie gehört, hat für die Auflösung gewisser Systeme linearer Gleichungen größere Bedeutung als die Determinantentheorie, die in diesen Fällen (und übrigens auch noch in anderen) die Lösung nicht in brauchbarer Form liefert.

§ 2.

Die Nablafunktion.

Das wichtigste Hilfsmittel unserer Untersuchung ist eine hier Nablafunktion genannte ganze rationale Funktion vierten Grades, die von den Koordinaten von irgend *vier Quaternionen* abhängt (also von sechzehn reellen oder gewöhnlichen komplexen Argumenten), mit der sich aber auf ähnliche Art und fast ebenso leicht rechnen läßt, wie mit den nur von vier Argumenten abhängigen zweireihigen Determinanten.

Wir lassen das Zeichen z nunmehr eine Quaternion mit Koordinaten z_k bedeuten,

$$z = (z_0, z_1, z_2, z_3).$$

Wir bezeichnen sodann mit $\tilde{z}$ (lies: z quer!) *die zu z konjugierte Quaternion,*

$$\tilde{z} = (z_0, -z_1, -z_2, -z_3),$$

und, wie üblich, mit $Nz = N\tilde{z}$ ihrer beider *Norm*

$$Nz = z\tilde{z} = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$ [9])

Die *Haupteinheit* der Quaternionen identifizieren wir, wie ebenfalls üblich, mit der Zahl Eins, so daß

$$z_0 = (z_0, 0, 0, 0)$$

wird. Quaternionen dieser Art nenne ich *numerisch* [10]).

Die Nablafunktion von $4 \cdot 4$ zu Quaternionen p, q, r, s zusammengefaßten Argumenten wird nun durch die Formel

$$(3) \qquad \boxed{\begin{aligned} \nabla &= \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix} = \\ &= p\tilde{p} \cdot s\tilde{s} - p\tilde{r}s\tilde{q} - q\tilde{s}r\tilde{p} + q\tilde{q} \cdot r\tilde{r} \end{aligned}}$$

erklärt [11]). Zu beachten ist dabei, daß außer den Normen $p\tilde{p}$ usw. auch die Summe $p\tilde{r}s\tilde{q} + q\tilde{s}r\tilde{p}$ numerisch ist. Da nun der numerische Bestand-

[9]) Das übliche Zeichen Kz (statt $\tilde{z}$) finde ich unbequem, das Zeichen $\bar{z}$ aber wird besser für die zu z konjugiert-komplexe Quaternion $(\bar{z}_0, z_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ aufgespart.

[10]) Das herkömmliche Wort *skalar* hat im komplexen Gebiet keinen rechten Sinn.

[11]) Man kommt zur Bildung dieses Ausdrucks, wenn man die weiterhin im Texte aufgeführten Gleichungen (6) zu lösen sucht. S. *Acta Mathematica* **42** (1918), S. 1 u. ff.

teil des Produkts zweier Quaternionen sich nicht ändert, wenn man diese miteinander vertauscht, so ist

$$p\tilde{r}s\tilde{q} + q\tilde{s}r\tilde{p} = r\tilde{p}q\tilde{s} + s\tilde{q}p\tilde{r} = \tilde{r}s\tilde{q}p + \tilde{p}q\tilde{s}r = \tilde{s}r\tilde{p}q + \tilde{q}p\tilde{r}s\,.$$

Daher kann man den Ausdruck (3) im ganzen in vier untereinander ähnliche Formen setzen. Dieser Umstand legt die Einführung der Zeichen

$$(4)\qquad \begin{aligned} P &= \tilde{s}s\cdot\tilde{p} - \tilde{r}s\tilde{q}, & R &= \tilde{q}q\cdot\tilde{r} - \tilde{p}q\tilde{s},\\ Q &= \tilde{r}r\cdot\tilde{q} - \tilde{s}r\tilde{p}, & S &= \tilde{p}p\cdot\tilde{s} - \tilde{q}p\tilde{r} \end{aligned}$$

nahe, und es findet sich dann sogleich, daß die Quaternionen P, Q, R, S zu p, q, r, s in einer ähnlichen Beziehung stehen wie die Komplemente der Elemente einer zweireihigen Determinante zu diesen Elementen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} Pp + Rr, & Pq + Rs \\ Qp + Sr, & Qq + Ss \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \nabla, & 0 \\ 0, & \nabla \end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix} pP + qQ, & pR + qS \\ rP + sQ, & rR + sS \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \nabla, & 0 \\ 0, & \nabla \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß man *immer dann und nur dann, wenn* $\nabla \neq 0$ *ist*, das eine wie das andere der Gleichungspaare

$$(6,l)\qquad \begin{aligned} px + qy &= x',\\ rx + sy &= y', \end{aligned} \qquad\qquad (6,r)\qquad \begin{aligned} \xi p + \eta r &= \xi',\\ \xi q + \eta s &= \eta', \end{aligned}$$

nach den Quaternionen x, y oder ξ, η eindeutig auflösen kann[12]):

$$(7,l)\qquad \begin{aligned} \nabla\cdot x &= Px' + Ry',\\ \nabla\cdot y &= Qx' + Sy', \end{aligned} \qquad\qquad (7,r)\qquad \begin{aligned} \nabla\cdot\xi &= \xi' P + \eta' Q,\\ \nabla\cdot\eta &= \xi' R + \eta' S. \end{aligned}$$

Die Struktur der Gleichungspaare $(6,l)$ und $(6,r)$ hat somit zur Folge, daß bei beiden Paaren *dieselbe* Funktion ∇ die Kenntnis der Auflösung vermittelt, und zwar nicht obgleich, sondern gerade *weil* in beiden die Quaternionen p, q, r, s in verschiedener Anordnung auftreten. Man kann das übrigens auch im voraus erkennen, wenn man bemerkt, daß die Gleichungen (6) ja auch in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{x}\tilde{p} + \tilde{y}q &= \tilde{x}', & \tilde{p}\tilde{\xi} + \tilde{r}\tilde{\eta} + \tilde{\xi}',\\ \tilde{x}\tilde{r} + \tilde{y}\tilde{s} &= \tilde{y}', & \tilde{q}\tilde{\xi} + \tilde{s}\tilde{\eta} = \tilde{\eta}' \end{aligned}$$

[12]) Die Quaternionengleichungen (6) vertreten *acht* lineare Gleichungen gewöhnlicher Art mit *acht* Unbekannten $x_0 \ldots y_3$ oder $\xi_0 \ldots \eta_3$. Die übliche Auflösungsmethode solcher Gleichungen mit Hilfe der Determinanten aber empfiehlt sich nicht. Sie ist nicht nur wenig übersichtlich, sondern sie liefert auch die Lösung in einer nicht sachgemäßen Form: Der gemeinsame Nenner von $x_0 \ldots y_3$ oder $\xi_0 \ldots \eta_3$ ist das Quadrat von ∇, und die in den Zählern auftretenden Determinanten enthalten ebenfalls den Faktor ∇. Man gerät also auf diese Weise in nutzlose Verwicklungen, die auf dem im Text beschrittenen Wege völlig vermieden werden.

geschrieben werden können, und daß

$$(8) \qquad \left\{\begin{matrix}\tilde{p} & \tilde{r}\\ \tilde{q} & \tilde{s}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}p & q\\ r & s\end{matrix}\right\}, \qquad \left\{\begin{matrix}\tilde{p} & \tilde{q}\\ \tilde{r} & \tilde{s}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}p & r\\ q & s\end{matrix}\right\}$$

ist. Die zweite der hier zusammengestellten Nablafunktionen ist von ∇ verschieden und hat mit der Auflösung der Gleichungen (6) nichts zu tun[13]).

Wir fassen nun die Gleichungen (6), unter der Annahme $\nabla \neq 0$, als zwei Transformationen auf, die den Quaternionenpaaren x, y und ξ, η andere x', y' und ξ', η' zuordnen. Beide Transformationen betrachten wir als bestimmt durch das quadratische Schema

$$\begin{pmatrix} p & q\\ r & s\end{pmatrix},$$

das wir als (zweireihige) *Quaternionenmatrix* bezeichnen; wir lassen also nicht etwa die eine Transformation dieser und die andere der transponierten Matrix entsprechen. Führen wir dann *nach* der Zuordnung $x, y \rightarrow x', y'$ eine zweite mit Quaternionen p', q', r', s' aus, $x', y' \rightarrow x'', y''$, und verfahren wir ebenso auch im zweiten Falle, so erhalten wir Zuordnungen derselben Art, $x, y \rightarrow x'', y''$ und $\xi, \eta \rightarrow \xi'', \eta''$. Wir erkennen, daß wir in den Gleichungen (6) die Definitionen zweier *Gruppen* von linearen Transformationen, mit je 16 Parametern im Raume von acht Dimensionen vor uns haben[14]). Die Formeln für die Parameter der zusammengesetzten Transformation sind

$$(9, l) \qquad \boxed{\begin{pmatrix} p' & q'\\ r' & s'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q\\ r & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'p + q'r, & p'q + q's\\ r'p + s'r, & r'q + s's\end{pmatrix},}$$

$$(9, r) \qquad \boxed{\begin{pmatrix} p & q\\ r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p' & q'\\ r' & s'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pp' + qr', & pq' + qs'\\ rp' + sr', & rq' + ss'\end{pmatrix}.}$$

Hier wird also aus zwei Quaternionenmatrizen, *die in eine bestimmte Reihenfolge gesetzt sind*, jedesmal eine dritte abgeleitet, und zwar, wenn man die Formeln von links nach rechts liest, *in beiden Fällen nach derselben Regel*. Wir reden von einer *Zusammensetzung* (*Multiplikation*,

[13]) Beide Werte fallen zusammen, wenn die Quaternionen (Zahlenquadrupel) p, q, r, s linear-abhängig sind. Siehe Nr. 72.

[14]) Diese Gruppen mit je acht Veränderlichen sind zueinander ähnlich im Sinne von S. Lie. Sie gehen ineinander über u. a. durch *die lineare Transformation des Quaternionenkonjugiums*

$$\tilde{x} = x', \quad \tilde{y} = y'.$$

Man sieht aus dem Texte, wie dann die Parameter einander zuzuordnen sind.

Komposition) *der Quaternionenmatrizen*, die eben durch die Formeln (9) definiert sein soll. Diese Zusammensetzung ist offenbar vollkommen analog der Zusammensetzung zweireihiger Matrizen von reellen oder gewöhnlichen komplexen Zahlen, und sie kann in ähnlicher Weise verwendet werden, wie diese. Vor allem ergibt sich daraus eine als *Multiplikationsregel der Nablafunktionen* zu bezeichnende ganz gleichartig gebaute Formel:

$$(10)\qquad \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p' & q' \\ r' & s' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p' & q' \\ r' & s' \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} pp' + qr', & pq' + qs' \\ rp' + sr, & rq' + ss' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p'p + q'r, & p'q + q's \\ r'p + s'r, & r'q + s's \end{Bmatrix}.$$

Da nämlich das Beispiel

$$(11)\qquad \begin{Bmatrix} 1 & \xi \\ \eta & 1 \end{Bmatrix} = 1 - \xi\eta - \eta\tilde{\xi} + N\xi \cdot N\eta$$

die Nablafunktion als eine irreduzibele Funktion ihrer sechzehn Argumente erweist und da außerdem $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = 1$ ist, so kann auf bekannte Art geschlossen werden, daß die Gleichungen oder Gleichungssysteme (9) entsprechend gebaute Gleichungen

$$\nabla' \cdot \nabla = \nabla'', \qquad \nabla \cdot \nabla' = \nabla''.$$

(also zweimal dieselbe Gleichung) nach sich ziehen, und dieses ist eben die in der Formel (10) ausgesprochene Tatsache.

Jetzt ergibt sicht noch eine Reihe weiterer Folgerungen.

Identifiziert man eine der beiden Nablafunktionen in (10) mit einer solchen der Form (11), in der entweder ξ oder η gleich Null ist, so erhält man, als Spezialfall von (10),

$$(12, l)\qquad \begin{Bmatrix} p + \lambda r, & q + \lambda s \\ r & s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix},$$

$$(12, r)\qquad \begin{Bmatrix} p + q\varrho, & q \\ r + s\varrho, & s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix},$$

Regeln, die wegen

$$(13)\qquad \begin{Bmatrix} r & s \\ p & q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} q & p \\ s & r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix}$$

auf ähnliche Art erweitert und in Worte gefaßt werden können, wie die entsprechenden Regeln für zweireihige Determinanten.

Ferner folgt

$$(14, l) \qquad \begin{Bmatrix} \lambda p, & \lambda q \\ r, & s \end{Bmatrix} = N\lambda \cdot \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix},$$

$$(14, r) \qquad \begin{Bmatrix} p\varrho, & q \\ r\varrho, & s \end{Bmatrix} = N\varrho \cdot \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix},$$

wobei der zu ∇ hinzutretende Faktor vom zweiten Grade in den Koordinaten von λ oder ϱ ist, abweichend von dem Verhalten der zweireihigen Determinanten. Da für $p = q = r = s = 1$ die Nablafunktion den Wert Null annimmt, so folgt aus (14) noch, daß — nunmehr wieder wie bei zweireihigen Determinanten —

$$(15) \qquad \begin{Bmatrix} \lambda\varrho, & \lambda\sigma \\ \mu\varrho, & \mu\sigma \end{Bmatrix} = 0$$

ist. Überdies nehmen aber auch noch die Funktionen P, Q, R, S für solche Quadrupel von Quaternionen p, q, r, s den Wert Null an. Ferner findet sich:

$$(16) \qquad \boxed{\begin{aligned} NP &= \nabla \cdot Ns, \quad NR = \nabla \cdot Nq, \\ NQ &= \nabla \cdot Nr, \quad NS = \nabla \cdot Np. \end{aligned}}$$

Aus (5) und (10) folgt noch:

$$(17) \qquad \begin{Bmatrix} P & R \\ Q & S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix}^3.$$

Hierin verhalten sich also die Quaternionen P, Q, R, S ähnlich wie die Komplemente zu den Elementen einer *vierreihigen* Determinante, und auch diese Analogie, die übrigens viel mehr ist als eine bloße Analogie[15]), geht noch weiter. Setzen wir nämlich, nach Anleitung der Formeln (4), unter Berücksichtigung des Umstandes, daß im System der Quaternionen P, Q, R, S die Matrix $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ vertreten wird,

$$(18) \qquad \begin{aligned} p^* &= \tilde{P} \cdot S\tilde{S} - \tilde{Q} S \tilde{R}, \qquad q^* = \tilde{Q} \cdot R\tilde{R} - \tilde{P} S \tilde{R}, \\ r^* &= \tilde{R} \cdot Q\tilde{Q} - \tilde{S} Q \tilde{P}, \qquad s^* = \tilde{S} \cdot P\tilde{P} - \tilde{R} P \tilde{Q}, \end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{pmatrix} Pp^* + Rr^*, & Pq^* + Rs^* \\ Qp^* + Sr^*, & Qq^* + Ss^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla^3 & 0 \\ 0 & \nabla^3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p^*P + q^*Q, & p^*R + q^*S \\ r^*P + s^*Q, & r^*R + s^*S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla^3 & 0 \\ 0 & \nabla^3 \end{pmatrix},$$

[15]) Siehe die Anmerkung am Schluß dieses Abschnittes.

und die Zusammenstellung dieser Formeln mit dem System (5) lehrt, daß

$$p^* = \nabla^2 \cdot p, \qquad q^* = \nabla^2 \cdot q, \tag{19}$$
$$r^* = \nabla^2 \cdot r, \qquad s^* = \nabla^2 \cdot s$$

sein muß.

Aus alledem folgt sodann, daß immer, wenn $\nabla \neq 0$ ist, eine vollkommene Reziprozität zwischen den Quadrupeln

$$p, \quad q, \quad r, \quad s$$

und

$$\frac{P}{\nabla}, \quad \frac{Q}{\nabla}, \quad \frac{R}{\nabla}, \quad \frac{S}{\nabla}$$

stattfindet. Setzt man also (*abweichend von der bisherigen Bezeichnung*):

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot P &= \tilde{s}\, s \cdot \tilde{p} - \tilde{r}\, s\, \tilde{q}, & \nabla \cdot R &= \tilde{q}\, q \cdot \tilde{r} - \tilde{p}\, q\, \tilde{s}, \\ \nabla \cdot Q &= \tilde{r}\, r \cdot q - \tilde{s}\, r\, \tilde{p}, & \nabla \cdot S &= \tilde{p}\, p \cdot \tilde{s} - \tilde{q}\, p\, \tilde{r}, \end{aligned}} \tag{20}$$

und ergänzt man entsprechend die Definition von ∇:

$$\nabla = \begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix}, \qquad \Delta = \begin{Bmatrix} P & R \\ Q & S \end{Bmatrix}, \tag{21}$$

so wird

$$\nabla \cdot \Delta = 1 \tag{22}$$

und

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \cdot p &= \tilde{P} \cdot S \tilde{S} - \tilde{Q} S \tilde{R}, & \Delta \cdot q &= \tilde{Q} \cdot R \tilde{R} - \tilde{P} R \tilde{S}, \\ \Delta \cdot r &= \tilde{R} \cdot Q \tilde{Q} - \tilde{S} Q \tilde{P}, & \Delta \cdot s &= \tilde{S} \cdot P \tilde{P} - \tilde{R} P \tilde{Q}; \end{aligned}} \tag{23}$$

die Matrizen

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$$

sind zueinander reziprok; ferner treten jetzt an Stelle der Gleichungen (16) die Gleichungen

$$\begin{aligned} NP : Ns &= NQ : Nr \\ = NR : Nq &= NS : Np \\ = 1 \;:\; \nabla &= \Delta \;:\; 1. \end{aligned} \tag{24}$$

[16])

Alles dieses gilt (wie die Herleitung zeigt) für Quaternionen mit (gewöhnlichen) komplexen Koordinaten, und völlig unabhängig davon, ob etwa einige der betrachteten Quaternionen Teiler der Null sind oder nicht[17]).

---

[16]) Eine umfassendere Formel wird, in anderer Bezeichnung, im nächsten Paragraphen entwickelt werden.

[17]) Alle vier Quaternionen p, q, r, s können Teiler der Null sein, ohne daß ∇ den Wert Null annimmt. Beispiel:

$$2p = 2r = e_2 + i e_3, \quad 2q = 2s = e_2 - i e_3.$$
$$\{e_1 = (0, 1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

Aber: *Für reelle Argumente ist die Nablafunktion semidefinit, und zwar ist sie unfähig, negative Werte anzunehmen. Die Matrizen reeller Quaternionen, die sie zum Verschwinden bringen, bilden ein zwölfdimensionales Kontinuum und können alle in die Form*

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\varrho, & \lambda\sigma \\ \mu\varrho, & \mu\sigma \end{pmatrix} \tag{25}$$

gesetzt werden. Alle Quadrupel reeller Quaternionen, die der Nablafunktion den Wert Null erteilen, erteilen also auch den Quaternionen

$$P,\ Q,\ R,\ S$$

den Wert Null. Man erkennt das alles unmittelbar. Vgl. Nr. 16[18]).

Bei alledem hatten wir nicht nötig, aus dem Operationsbereich der Quaternionenrechnung herauszutreten. Die Quaternionen (sie und andere Systeme von höheren komplexen Zahlen) sind in der Tat das zunächstliegende und jedenfalls handlichste Hilfsmittel für Untersuchungen über gewisse Transformationsgruppen, die ohne sie nur schwer durchzuführen sein würden. Ich gedenke hier eines vor noch nicht sehr langer Zeit verbreiteten (wenigstens in Deutschland verbreiteten) und vielleicht auch jetzt noch nicht ganz erloschenen Vorurteils, das von solchen Abkürzungen nichts wissen wollte. Indessen darf man natürlich nicht vergessen, daß mathematische Symbole nicht um der Symbole willen da sind[19]). Und so mag es immerhin nützlich sein, wenigstens im Falle der Nablafunktion selbst auch einen nur mit Hilfe von Summen- und Produktzeichen gebildeten Ausdruck für ∇ vor Augen zu haben:

$$\begin{aligned} \nabla = \Big\{ & (p_0^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2)(s_0^2+s_1^2+s_2^2+s_3^2) \\ \Big\{ & +(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2)(r_0^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2) \\ & -2(p_0r_0+p_1r_1+p_2r_2+p_3r_3)(q_0s_0+q_1s_1+q_2s_2+q_3s_3) \\ & -2(p_0r_1-p_1r_0+p_2r_3-p_3r_2)(q_0s_1-q_1s_0+q_2s_3-q_3s_2) \\ & -2(p_0r_2-p_2r_0+p_3r_1-p_1r_3)(q_0s_2-q_2s_0+q_3s_1-q_1s_3) \\ & -2(p_0r_3-p_3r_0+p_1r_2-p_2r_1)(q_0s_3-q_3s_0+q_1s_2-q_2s_1). \end{aligned} \tag{26}$$

Im ganzen würde eine solche Übersetzung unserer Formeln in die primitivere Kunstsprache der elementaren Algebra ein nicht geringes Maß

[18]) Außerdem hat I. Schur noch bewiesen, daß die Nablafunktion reeller Argumente zu der von Hilbert aufgefundenen Art ganzer rationaler Funktionen gehört, die negativer Werte unfähig sind, aber nicht als Summen von Quadraten ganzer rationaler Funktionen dargestellt werden können. (Siehe die zitierte Abhandlung in den A. M., S. 36.)

[19]) Tatsächlich hat man das oft genug vergessen, und darauf beruht der (übrigens geringe) Anschein von Berechtigung, den die im Texte erwähnte Meinung eine Zeitlang haben konnte.

von Geduld und Papierverbrauch in Anspruch nehmen. Ja selbst der noch ziemlich kurze Ausdruck (26) der Nablafunktion ist als Rechnungsmittel sehr unbequem.

Der Ausdruck der Nablafunktion umfaßt als besondere Fälle das Quadrat einer zweireihigen Determinante, und schon bei Beschränkung auf reelle Argumente auch das Produkt einer zweireihigen Determinante aus einer gewöhnlichen komplexen Zahl mit ihrem konjugiert-komplexen Wert. Im komplexen Gebiete aber kann die Nablafunktion selbst als Determinante, und zwar als eine *vierreihige* Determinante voneinander unabhängiger Elemente, zweckmäßig bezeichnet als *Gitterdeterminante*, dargestellt werden. Hierauf eben beruhen die Analogien, von denen die Rede war.

Was hier über diese Analogien vorgetragen werden soll, ist zum Verständnis eines großen Teiles des Folgenden nicht erforderlich. Ich setze daher diesen Stoff in kleinen Druck und zähle die Formeln, die später (in § 11) zu benutzen sein werden, besonders.

Bekanntlich hängt im komplexen Gebiete die Quaternionenrechnung mit dem Rechnen mit zweireihigen Matrizen auf sehr einfache Art zusammen. Setzt man

$$[1] \qquad \begin{aligned} z_0 + i z_3 &= z_{11}, & i z_1 - z_2 &= z_{12}, \\ i z_1 + z_2 &= z_{21}, & z_0 - i z_3 &= z_{22}, \end{aligned}$$

so werden dadurch den Quaternionen z und $\tilde{z}$ Matrizen nach dem Schema

$$[2] \qquad z \sim \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{z} \sim \begin{pmatrix} z_{22}, & -z_{12} \\ -z_{21}, & z_{11} \end{pmatrix}$$

zugeordnet, und zugleich wird

$$[3] \qquad N z = z \tilde{z} = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} = z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21},$$

sowie

$$x y \sim \begin{pmatrix} x_{11} y_{11} + x_{12} y_{21}, & x_{11} y_{12} + x_{12} y_{22} \\ x_{21} y_{11} + x_{22} y_{21}, & x_{21} y_{12} + x_{22} y_{22} \end{pmatrix},$$ [20])

also, nach der Regel der Zusammensetzung zweireihiger Matrizen,

$$[4] \qquad x y \sim \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation der Quaternionen und die der zweireihigen Matrizen laufen zueinander parallel.

Diese Regel für die Multiplikation von Quaternionen („einreihigen Quaternionenmatrizen") läßt sich nun auf Matrizen übertragen, die aus m^2 Quaternionen gebildet

[20]) Insbesondere wird

$$z \tilde{z} \sim \begin{pmatrix} z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}, & 0 \\ 0 & , \; z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21} \end{pmatrix}$$

oder

$$z \tilde{z} \sim (z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

was wieder die Formel [3] liefert, wenn man die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit der Zahl Eins identifiziert und entsprechend das Zeichen $\sim$ durch das Zeichen der Gleichheit ersetzt.

werden können[21]). Insbesondere lassen wir einer zweireihigen Quaternionenmatrix eine vierreihige gewöhnliche Matrix (Gittermatrix) entsprechen:

$$[5] \qquad \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & q_{11} & q_{12} \\ p_{21} & p_{22} & q_{21} & q_{22} \\ r_{11} & r_{12} & s_{11} & s_{12} \\ r_{21} & r_{22} & s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}.$$

Ähnlich wie zuvor läuft dann die Zusammensetzung oder Multiplikation der zweireihigen Quaternionenmatrizen der Zusammensetzung oder Multiplikation der entsprechenden vierreihigen Matrizen parallel (wie man durch eine einfache Rechnung feststellen wird). Hieraus läßt sich dann noch weiter schließen, daß die Nablafunktion der entsprechend gebildeten Determinante gleich sein muß:

$$[6] \qquad \left\{ \begin{matrix} p & q \\ r & s \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} p_0 + ip_3, & ip_1 - p_2, & q_0 + iq_3, & iq_1 - q_2 \\ ip_1 + p_2, & p_0 - ip_3, & iq_1 + q_2, & q_0 - iq_3 \\ r_0 + ir_3, & ir_1 - r_2, & s_0 + is_3, & is_1 - s_2 \\ ir_1 + r_2, & r_0 - ir_3, & is_1 + s_2, & s_0 - is_3 \end{vmatrix}.$$

Umgekehrt läßt sich natürlich auch eine vorgelegte vierreihige Determinante als Nablafunktion schreiben, nicht aber jede Nablafunktion oder Determinante *mit reellen Argumenten* als ebensolche Determinante oder Nablafunktion.

Im komplexen Gebiete besteht also zwischen Nablafunktionen und vierreihigen Determinanten überhaupt kein wesentlicher Unterschied, beide werden (übrigens auf unendlich viele Arten) durch gewisse einander entgegengesetzte *stets imaginäre* lineare Transformationen ineinander übergeführt. Im reellen Gebiete aber sind beide Arten von Funktionen wesentlich voneinander verschieden, auf dieselbe Art, wie schon die Funktionen $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ und $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$ voneinander verschieden sind, deren erste als „Nablafunktion von vier Argumenten" würde bezeichnet werden können.

Wie in dem eben angeführten einfachen Falle tritt der Unterschied beider Arten von Funktionen reeller Argumente besonders deutlich in den Werten dieser Argumente hervor, die die eine oder andere Funktion zum Verschwinden bringen.

Behandeln wir die Elemente einer vierreihigen Matrix mit der Determinante D als homogene Punktkoordinaten in einem projektiven Punktkontinuum von 15 komplexen Dimensionen, so liefert uns die Gleichung $D = 0$ eine irreduzibele biquadratische Mannigfaltigkeit M_{14} (eigentlich $M_{2.14}$) von vierzehn komplexen Dimensionen mit $2 \cdot \infty^{2 \cdot 30}$ automorphen Kollineationen. Auf ihr liegt eine ebenfalls irreduzibele M_{11}, deren Punkte (mindestens) Doppelpunkte der M_{14} sind, und auf dieser wieder eine irreduzible M_6, die aus dreifachen Punkten der M_{14} besteht, und ihrerseits sowohl die M_{11} als auch die M_{14} bestimmt (siehe die Schlußbemerkung). *Die* M_{14}, M_{11}, M_6 *tragen der Reihe nach die Bilder der Matrizen, deren Rang* 3, 2 *oder* 1 *ist.* Sie alle sind rational und *reell*[22]), und überdies hat auch jede einen (einzigen) reellen Zug, von 14, 11 und 6 Dimensionen[23]).

[21]) Siehe die zitierte Abhandlung.

[22]) Nach der in der Anmerkung auf Seite 59 angeführten Definition.

[23]) Die genannte Gruppe enthält $8 \cdot \infty^{30}$ reelle Transformationen. Die Gruppe, die entsprechend zu der weiterhin zu nennenden M_{14} gehört, enthält dagegen nur $2 \cdot \infty^{30}$ reelle Transformationen.

Analog läßt sich auch die Gleichung $\nabla = 0$ behandeln. Wir erhalten dann eine ebenfalls *reelle* M_{14}, M_{11}, M_6. *Aber nur die* M_{11} *enthält reelle Punkte, und zwar hat sie einen elfdimensionalen reellen Zug (denselben, den wir zuvor durch die Quaternionenparameter* $\lambda, \mu, \varrho, \sigma$ *dargestellt hatten.* Vgl. Nr. 15, 25).

Im Zusammenhange hiermit ergeben sich noch eine Menge interessanter und zum Teil schwieriger Fragen (die übrigens auf die Theorie der Matrizen von n^2 Elementen erstreckt werden können). Die Ordnungszahl der M_6 wird leicht $= 20$ gefunden, mit der M_{11} aber ist es schon eine andere Sache. Die Ordnung der M_{11} ist gleich der Anzahl der Lösungen des im engeren Sinne sogenannten „Problems der räumlichen Projektivitäten", und für diese Zahl hat R. Sturm auf Grund einer nichts weniger als einfachen und auch nicht in Strenge geführten Untersuchung ebenfalls den Wert 20 angegeben. (Math. Ann. **6** (1873), S. 548.) Danach hätten wir also im Gebiete R_{15} drei gegenüber der genannten Gruppe invariante (und von ihr transitiv transformierte) Punktmannigfaltigkeiten, eine M_{14}^4, darauf die Doppelpunktsmannigfaltigkeit M_{11}^{20} und auf dieser wieder die Mannigfaltigkeit M_6^{20}, die aus dreifachen Punkten der M_{14} besteht. Auf der M_{11} liegen alle Sehnen (und also auch alle Tangenten) der M_6, und auf der M_{14} alle Ebenen, die drei Punkte der M_6 verbinden, nebst ihren Grenzlagen. Auf diese Art bestimmt also schon die M_6 die beiden anderen Punktmannigfaltigkeiten. Die Mannigfaltigkeiten M_{14}, M_{11}, M_6 sind zu M_{14}, M_{11}, M_6 imaginär-kollinear.

§ 3.

Lineare Transformationen einer Quaternion.

Wir betrachten jetzt nochmals die Transformationsgleichungen (6), sehen aber von der besonderen Zusammenstellung ab, die wir zuvor durch zweimaligen Gebrauch derselben Zeichen p, q, r, s ausgedrückt hatten:

$$(27, l, r) \qquad \begin{aligned} a x_1 + b x_2 &= x_1', & u_1\alpha + u_2\beta &= u_1', \\ c x_1 + d x_2 &= x_2', & u_1\gamma + u_2\delta &= u_2'. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Nablafunktionen

$$(28) \qquad \nabla_l = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}, \qquad \nabla_r = \begin{Vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{Vmatrix}$$

seien von Null verschieden. Dann werden durch die Gleichungen (27) Transformationen dargestellt, deren Zusammensetzung, wenn die *nach* (27) auszuführenden Transformationen mit einem Akzent bezeichnet werden, den Regeln

$$(29) \qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \quad \{T_l T_l' = T_l''\},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'' & \gamma'' \\ \beta'' & \delta'' \end{pmatrix} \quad \{T_r T_r' = T_r''\}$$

folgt.

Aus den Transformationen (27) lassen sich nun andere ableiten, in denen die Zahl der unabhängig-veränderlichen Quaternionen auf Eins reduziert ist und die auch wieder Gruppen bilden. Wir erhalten diese Gruppen, wenn wir x_1 und x_2 oder u_1 und u_2 als in gewissem Sinne homogene Größen, als *Verhältnisquaternionen* betrachten. Haben wir es dann nur mit *reellen* Quaternionen zu tun, wie nunmehr vorausgesetzt werden soll, so unterliegen x_1 und x_2, und ebenso u_1 und u_2, der einzigen Einschränkung, daß sie nicht beide zugleich Null sein dürfen: also keiner anderen Einschränkung, als gewöhnliche homogene Veränderliche x_1 und x_2. Wir setzen nun

$$x_1 x_2^{-1} = \frac{x_1}{x_2} = x, \qquad u_2^{-1} u_1 = \frac{u_1}{u_2} = u;$$

die zunächst erforderliche Einschränkung $x_2 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ wird dadurch aufgehoben, daß wir sogleich das nach dem Unendlichen hin offene vierdimensionale Kontinuum der reellen Punkte (x), (u) durch einen „uneigentlichen Punkt", das Kontinuum der entsprechenden Quaternionen durch die „uneigentliche Quaternion" ∞ abschließen. Dann liefern uns die Formeln

$$(30, l) \qquad \frac{ax+b}{cx+d} = x', \qquad\qquad (30, r) \qquad \frac{u\alpha+\beta}{u\gamma+\delta} = u',$$

die im Falle $c \neq 0$ oder $\gamma \neq 0$, ausgerechnet, quadratische Glieder (aber nur in den Verbindungen $Nx = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $Nu = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$) enthalten, je eine Gruppe von nicht-linearen Transformationen der Veränderlichen x_k und u_k, oder der Punkte (x), (u), in deren Variabilitätsbereich wir nun auch den uneigentlichen Punkt, entsprechend den uneigentlichen Quaternionen $x = \infty$ und $u = \infty$, zulassen. Diese Transformationen sind dann alle in dem erklärten Möbiusschen Punktkontinuum *überall definiert, eindeutig und stetig*, in demselben Sinne der Worte, in dem die durch die Formel (1) erklärten Transformationen allenthalben definiert, eindeutig und stetig sind. Die Transformationen (30) sind aber zu den linearen Transformationen einer gewöhnlichen komplexen Veränderlichen in anderen Beziehungen nicht analog. Namentlich findet bei diesen, wenn man von homogenen Gleichungen (ähnlich denen der Nr. 27) zu solchen der Form (1) übergeht, eine Verringerung der Zahl der wesentlichen Parameter um zwei Einheiten statt, wonach im vorliegenden Falle eine Verringerung der Parameterzahl um vier Einheiten zu vermuten wäre. Statt dessen enthalten die Gleichungen (30) je 15 wesentliche Parameter, also nur je einen Parameter weniger als die entsprechenden Gleichungen (27): *Nur* eine Multiplikation der Quaternionen a, b, c, d oder $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit einer (von Null verschiedenen) numerischen Quaternion, also Multiplikation

mit einer (hier reellen) Zahl ändert die durch die Formeln (30) dargestellte Transformation nicht. Zur Zusammensetzung zweier Transformationen $(30, l)$ oder $(30, r)$ aber können nach wie vor die Formeln (29) dienen.

Von den Gleichungen (30) aus kommen wir nun zu bilinearen Gleichungen

$$\begin{aligned} x'cx + x'd - ax - b &= 0, \\ u\gamma u' + \delta u' - u\alpha - \beta &= 0, \end{aligned} \tag{31}$$

und von diesen zur Auflösung der Gleichungen (30):

$$x = \frac{x'd - b}{-x'c + a}, \qquad u = \frac{\delta u' - \beta}{-\gamma u' - \alpha}.$$

Die Formeln

$$(32, l) \quad \frac{xd - b}{-xc + a} = x', \qquad (32, r) \quad \frac{\delta u - \beta}{-\gamma u + \alpha} = u'$$

liefern also die zu (30) entgegengesetzte Transformation.

Jede der Gleichungen (32) *hat nun die Form der ihr nicht entsprechenden Gleichung* (30). Man sieht hieraus, daß die durch die Formeln (30) dargestellten Gruppen nicht voneinander verschieden sein können, daß es also möglich sein muß, die Parameter beider Gruppen einander so zuzuordnen, daß jede der beiden Gleichungen

$$x = u, \qquad x' = u'$$

die andere nach sich zieht.

In der Tat kann man, nach dem Vorgetragenen, durch Bestimmung der zu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

reziproken, den Gleichungen

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

genügenden Matrizen jede der Zuordnungen (32) auch in eine solche Form setzen, die der Form der entsprechenden Gleichung (30) gleicht:

$$\frac{Ax + C}{Bx + D} = x', \qquad \frac{u\mathsf{A} + \Gamma}{u\mathsf{B} + \Delta} = u'.$$

Hieraus und aus (32) ergeben sich dann, nach einfachster Verfügung über einen willkürlich bleibenden Proportionalitätsfaktor, die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d, & -c \\ -b, & a \end{pmatrix},$$

so daß nunmehr

$$(33)\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} d, & -c \\ -b, & a \end{pmatrix}$$

reziproke Matrizen werden.

Damit haben wir den Lehrsatz: *Die Gleichungen*

$$(34)\qquad \boxed{\frac{az+b}{cz+d} = z', \qquad \frac{z\alpha+\beta}{z\gamma+\delta} = z'}$$

stellen dieselbe Transformation T dar, wenn

$$(35)\qquad \boxed{\begin{aligned} \tilde{a}a\cdot\tilde{d} - \tilde{b}a\ \tilde{c} &= \nabla_l\cdot\alpha, & \tilde{d}c\ \tilde{a} - \tilde{c}c\cdot\tilde{b} &= \nabla_l\cdot\gamma, \\ \tilde{a}b\ \tilde{d} - \tilde{b}b\cdot\tilde{c} &= \nabla_l\cdot\beta, & \tilde{d}d\cdot\tilde{a} - \tilde{c}d\ \tilde{b} &= \nabla_l\cdot\delta, \end{aligned}}$$

und demzufolge

$$(36)\qquad \boxed{\begin{aligned} \nabla_r\cdot a &= \tilde{\delta}\cdot\alpha\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}\ \alpha\tilde{\beta}, & \nabla_r\cdot b &= \tilde{\delta}\ \beta\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}\cdot\beta\tilde{\beta}, \\ \nabla_r\cdot c &= \tilde{\alpha}\ \gamma\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\cdot\gamma\tilde{\gamma}, & \nabla_r\cdot d &= \tilde{\alpha}\cdot\delta\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\ \delta\tilde{\gamma} \end{aligned}}$$

ist (oder umgekehrt).

Die Transformation T^{-1} wird dann durch die Gleichungen

$$(37)\qquad \boxed{\frac{\delta z-\beta}{-\gamma z+\alpha} = z', \qquad \frac{zd-b}{-zc+a} = z'}$$

dargestellt. (Nach Vertauschung von z und z' liefert jede dieser Gleichungen die Auflösung der entsprechenden Gleichung (34) in gleicher Form wie diese selbst.)

Wir wollen die Quaternionenmatrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

verschwisterte Matrizen nennen. Die zu solchen gehörigen Nablafunktionen stehen dann in der Beziehung

$$(38)\qquad \boxed{\nabla_l\cdot\nabla_r = 1}.$$

Die durch die Gleichungen (34) *dargestellte Gruppe werden wir weiterhin kurz als die Gruppe Γ_{15} bezeichnen.*

Nunmehr sieht man, daß das Verschwinden von $a, b, c, d, az+b, cz+d, z'd-b, -z'c+a$ jedesmal das Verschwinden einer entsprechenden Quaternion $\alpha, \ldots, -\gamma z'+\alpha$ zur Folge haben muß. Das findet seinen Ausdruck in den Identitäten

$$\begin{aligned} & N(\ az+b) : N(\ z\alpha+\beta) \\ &= N(\ cz+d) : N(\ z\gamma+\delta) \\ &= N(\ z'd-b) : N(\ \delta z'-\beta) \\ &= N(-c'+z\,a) : N(-\gamma z'+\alpha) \\ &= \nabla_l : 1 \quad = \quad 1 : \nabla_r, \end{aligned} \tag{39}$$

die ebenso eine Folge der Gleichungen (35), (36) sind, wie die noch etwas inhaltsreicheren Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}a & \tilde{b}a & a\tilde{c} & 0 \\ \tilde{a}b & \tilde{b}b & 0 & b\tilde{d} \\ c\tilde{a} & 0 & \tilde{c}c & \tilde{d}c \\ 0 & d\tilde{b} & \tilde{c}d & \tilde{d}d \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha\tilde{\alpha} & \alpha\tilde{\beta} & \tilde{\gamma}\alpha & 0 \\ \beta\tilde{\alpha} & \beta\tilde{\beta} & 0 & \tilde{\delta}\beta \\ \tilde{\alpha}\gamma & 0 & \gamma\tilde{\gamma} & \gamma\tilde{\delta} \\ 0 & \tilde{\beta}\delta & \delta\tilde{\gamma} & \delta\tilde{\delta} \end{vmatrix} \tag{40}$$

$$= \nabla_l : 1 \quad = \quad 1 : \nabla_r.$$ [24])

Ferner müssen, wenn die beiden Nenner in (34) den Wert Null annehmen (was, wenn überhaupt, nach dem Gesagten immer zugleich eintritt), die Nenner der mit dem Argumente z' (statt z) gebildeten Ausdrücke (37) ins Unendliche gehen, und, wenn d, δ nicht Null sind, außerdem auch die Zähler; und Entsprechendes gilt von den Nennern in (37). Eine auf diesen Punkt gerichtete Rechnung liefert unter anderem die Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} (cz+d)(-\gamma z'+\alpha) &= 1 = (-\gamma z'+\alpha)(cz+d), \\ (z\gamma+\delta)(-z'c+a) &= 1 = (-z'c+a)(z\gamma+\delta). \end{aligned}} \tag{41}$$

In der Tat ergibt sich (aus Nr. 33 und Nr. 31) z. B.:

$$\begin{aligned} (cz+d)(-\gamma z'+\alpha) &= -cz\gamma z' - d\gamma z' + cz\alpha + d\alpha \\ &= -cz\gamma z' - c\delta z' + cz\alpha + c\beta + 1 = c\cdot 0 + 1. \end{aligned}$$

Die Quaternionenprodukte links in (41) sind also numerisch, und daher sind ihre Faktoren vertauschbar. Wenn c und γ nicht Null sind, so stellen diese Formeln (41) die Abhängigkeit zwischen z und z' in besonders einfacher Form dar: Die Stellen, für die z' und z ins Unendliche gehen, also

[24]) Nur acht von den in (40) enthaltenen Gleichungen sagen (im Verhältnis zu den vorhergehenden Gleichungen) Neues aus.

Eine geringe Vereinfachung läßt sich natürlich noch erreichen, wenn man $\nabla_l - 1 = \nabla_r$ annimmt. Dazu aber muß man den Bereich der rationalen Operationen verlassen.

die „Fluchtpunkte" der Transformationen T und T^{-1}, treten hier ganz symmetrisch in Erscheinung. Bemerkenswert sind auch noch die aus (40) fließenden Identitäten

$$(42)\qquad \left.\begin{aligned} &\tilde{a}(az+b):(z\alpha+\beta)\tilde{\alpha}\\ =\;&\tilde{c}(cz+d):(z\gamma+\delta)\tilde{\gamma}\\ =\;&(z'd-b)\tilde{d}:\tilde{\delta}(\delta z'-\beta)\\ =\;&(-z'c+a)\tilde{c}:\tilde{\gamma}(-\gamma z'+\alpha)\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&=\nabla_l:1,\\ &=1:\nabla_r,\end{aligned}$$ [25])

vermöge deren man die Produkte (41) auch noch in eine andere allerdings weniger einfache Form bringen kann.

Setzt man in den Formeln, die zur Darstellung der Transformation T dienen, $c=0$, $\gamma=0$ und

$$(43)\qquad Na=Nd,\qquad N\alpha=N\delta,$$ [26])

so erhält man *die Gruppe der ∞^{10} Bewegungen* im vierdimensionalen Euklidischen Raume,

$$(44)\qquad \boxed{(az+b)d^{-1}=z',\qquad \delta^{-1}(z\alpha+\beta)=z'.}$$

Hier wird $\delta b=\beta d$, und man kann noch annehmen, daß

$$a=\delta^{-1},\qquad d^{-1}=\alpha$$

ist.

Die Formeln (44) lassen die Struktur der Bewegungsgruppe erkennen. Unter ihren invarianten Untergruppen, die man leicht ermitteln wird, heben wir die beiden Gruppen

$$(45,l)\qquad \boxed{\begin{aligned}&az+b=z',\quad \{Na=1\},\\ &z\alpha+\beta=z',\quad \{N\alpha=1\}\end{aligned}}\qquad (45,r)$$

hervor, die von je ∞^7 Transformationen gebildet werden, und als *Gruppen „linkseitiger" und „rechtseitiger" Bewegungen* unterschieden werden können. Läßt man die Bedingung (43) fallen, so erhält man eine ebenfalls kontinuierliche ∞^{11} Transformationen umfassende Gruppe, *die Gruppe der eigentlichen Ähnlichkeitstransformationen*. Diese ist offenbar identisch mit der Gruppe aller der Transformationen von Γ_{15}, die den Punkt ∞ in Ruhe lassen.

[25]) Bezeichnet man die Quaternionen in (42) abkürzend mit L_i, R_i $(i=1,2,3,4)$, so folgt

$$L_iR_k=R_iL_k$$

aber nicht etwa $L_iR_k=L_kR_i$).

[26]) Man beachte, daß man zur Erfüllung dieser Gleichungen keine Irrationalität braucht. Setzt man $f=a+d$, $g=a-d$, so folgt $f\tilde{g}+g\tilde{f}=0$, d. h.

$$f_0g_0+f_1g_1+f_2g_2+f_3g_3=0.$$

Ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis erhalten wir, wenn wir die Transformation T auf zwei Punkte $z = x$ und $z = y$ anwenden, und in die Differenz $y' - x'$ für y' den einen und für x' den anderen der Ausdrücke (34) einsetzen. Wir finden dann

$$(46)\qquad \begin{aligned}(x\gamma+\delta)^{-1}(y-x)(cy+d)^{-1} &= y'-x',\\ (y\gamma+\delta)^{-1}(y-x)(cx+d)^{-1} &= y'-x',\end{aligned}$$

wofür man auch schreiben kann

$$(47)\qquad \begin{aligned}\frac{y-x}{|cx+d|} &= \frac{y'-x'}{|-y'c+a|}, & \frac{y-x}{|cy+d|} &= \frac{y'-x'}{|-x'c+a|},\\ \frac{y-x}{|x\gamma+\delta|} &= \frac{y'-x'}{|-\gamma y'+\alpha|}, & \frac{y-x}{|y\gamma+\delta|} &= \frac{y'-x'}{|-\gamma x'+\alpha|}.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich in der Grenze (für Differentiale dz, dz'):

$$(48)\qquad \boxed{\frac{dz}{|cz+d|} = \frac{dz'}{|-z'c+a|}, \qquad \frac{dz}{|z\gamma-\delta|} = \frac{dz'}{|-\gamma z'+\alpha|}.}$$

Die ausgeführte Abbildung einer Umgebung des Punktes z auf eine Umgebung des Punktes z' wird hiermit als *konform* erkannt. Die Abbildung der Umgebung eines Fluchtpunktes auf die Umgebung des Punktes ∞ aber darf ebenfalls noch als *konform* betrachtet werden, da sie immer — wie eben die Formeln (48) zeigen, in eine konforme Abbildung übergeht, wenn man beide Punkte derselben Transformation T_1 unterwirft, und sie dadurch ihrer Sonderstellung entkleidet. Liegen die Punkte x und x' beide im Endlichen, so gibt es immer eine eigentliche Ähnlichkeitstransformation, *die T tangierende Ähnlichkeitstransformation*, derart, daß im Infinitesimalen die Umgebungen von x und x' durch beide Transformationen einander in gleicher Weise zugeordnet werden:

$$(49)\qquad \frac{z-x}{|cx+d|} = \frac{z'-x'}{|-x'c+a|}, \qquad \frac{z-x}{|x\gamma+\delta|} = \frac{z'-x'}{|-\gamma x'+\alpha|}.$$

Ferner läßt sich — nach Nr. 39 — die Gleichung (46) in die Form

$$(50)\qquad \frac{\nabla_l \cdot N(y-x)}{N(cx+d)\cdot N(cy+d)} = N(y'-x') = \frac{\nabla_r \cdot N(y-x)}{N(x\gamma+\delta)\cdot N(y\gamma+\delta)}$$

setzen, woraus sich in der Grenze die Abhängigkeit einander zugeordneter quadrierter Bogenelemente ergibt (vgl. Nr. 48):

$$(51)\qquad \boxed{\begin{aligned}\frac{\nabla_l \cdot dz\, d\tilde{z}}{N(cz+d)^2} &= dz'\,d\tilde{z}' = \frac{\nabla_r \cdot dz\, d\tilde{z}}{N(z\gamma+\delta)^2},\\ \frac{dz\,d\tilde{z}}{N(cz+d)} &= \frac{dz'\,d\tilde{z}'}{N(-z'c+a)}, \qquad \frac{dz\,d\tilde{z}}{N(z\gamma+\delta)} = \frac{dz'\,d\tilde{z}}{N(-\gamma z'+\alpha)}.\end{aligned}}$$

Daß wir in unserer Gruppe Γ_{15} *die Gruppe aller eigentlichen Möbiusschen Transformationen im erklärten Punktkontinuum* vor uns haben, ergibt sich nun aus der Tatsache, daß die Transformationen (34) ein Kontinuum bilden, die erforderliche Parameterzahl 15 haben, und daß sie konform sind. Wir werden aber weiterhin dasselbe auch ganz elementar nachweisen. Daß die Transformationen (*„quasi-lineare Transformationen einer Quaternion z“*)

$$(52) \qquad \boxed{\frac{lz+m}{nz+r} = z', \qquad \frac{\bar{z}\lambda+\mu}{\bar{z}\nu+\varrho} = z',}$$

die in ganz gleicher Weise zu behandeln sind wie die hier bisher betrachteten Transformationen, dann *die uneigentlichen Möbiusschen Transformationen* im selben Punktkontinuum darstellen, ist selbstverständlich. Doch sei darauf aufmerksam gemacht, daß in diesem Falle die zu Nr. 37 analogen Gleichungen eine andere Form haben:

$$(53) \qquad \frac{\bar{z}\bar{\varrho}-\bar{\mu}}{-\bar{z}\bar{\nu}+\bar{\lambda}} = z', \qquad \frac{\bar{r}\bar{z}-\bar{m}}{-\bar{n}\bar{z}+\bar{l}} = z'.$$

Die nunmehr vorliegende umfassendere Gruppe ist also geschichtet, und ihre Hauptschicht ist Γ_{15}. Die zugehörige Nebenschicht heiße H_{15}.

Schließlich liegt die Frage nahe: Was wird aus unseren Transformationen, wenn die eingeführte Voraussetzung $\nabla_l \neq 0$ oder $\nabla_r \neq 0$ nicht mehr erfüllt ist? Die (*nur für das reelle Gebiet erschöpfende*) Antwort hierauf ist:

Grenzfälle oder Ausartungen der betrachteten (eigentlichen oder uneigentlichen) Transformationen sind ausschließlich Zuordnungen von folgender Beschaffenheit: Es gibt einen Punkt z_0, dem ein völlig unbestimmter Punkt z' entspricht, und einen Punkt z'_0, der einem völlig unbestimmten Punkt z entspricht. Jedem von z_0 verschiedenen Punkt z entspricht der bestimmte Punkt z'_0, und jeder von z'_0 verschiedene Punkt z' entspricht dem bestimmten Punkt z_0.

(*Die Punkte z_0, z'_0 können jeder, und auch beide, der uneigentliche Punkt sein.*)

Dies wird sich mit den entwickelten Hilfsmitteln unschwer, aber nicht ohne Unterscheidung mehrerer Fälle zeigen lassen. Um dieser Umständlichkeit willen soll der Beweis aufgeschoben werden (§ 11).

Auf die Analogie der entwickelten Sätze mit solchen aus der Theorie der linearen (und „quasi-linearen“) Transformationen einer gewöhnlichen komplexen Veränderlichen in jedem einzelnen Falle besonders hinzuweisen, habe ich für überflüssig erachtet, nachdem es in § 2 wiederholt geschehen ist.

Durch Gleichungen der Form

$$\frac{a_{k1} z_1 + \ldots + a_{k,n-1} z_{n-1} + a_{kn}}{a_{n1} z_1 + \ldots + a_{n,n-1} z_{n-1} + a_{nn}} = z'_k \qquad (k = 1 \ldots n-1)$$

lassen sich analytische Gruppen mit $4n^2 - 1$ wesentlichen Parametern erklären, deren reelle Transformationen in gewissen Kontinuis von $4(n-1)$ Dimensionen, analog den Möbiusschen, *überall* eindeutig und stetig sind, und die sich zur Kollineationsgruppe im R_{2n-1} ähnlich verhalten wie die der einfachsten Annahme $n = 2$ entsprechenden konformen Transformationen im R_4 zu den Kollineationen im R_3. Eine auch für n^2 Quaternionen zu erklärende Nablafunktion liefert die Bedingung, der die Koeffizienten $a_{11} \ldots a_{nn}$ zu genügen haben, $\{a_{11} \ldots a_{nn}\} \neq 0$ (> 0 für reelle Transformationen).

§ 4.

Automorphe Kollineationen einer sphärischen Mannigfaltigkeit im R_5.

Wir wollen jetzt die entwickelten Formeln auf die Theorie der quadratischen Mannigfaltigkeit M_4^2 anwenden, von der in § 1 die Rede war. Dieser Gegenstand gibt allein Stoff zu einer umfangreichen Theorie; hier sollen nun die ersten Schritte getan werden, um daran einige einfache Überlegungen zu schließen, die das Verständnis des weiterhin Folgenden sehr erleichtern werden.

Es sei im projektiven Punktkontinuum des Raumes R_5 eine quadratische Mannigfaltigkeit gegeben, die in homogenen Koordinaten durch die Gleichung

$$Z_\alpha^2 - Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - Z_\omega^2 = 0 \tag{54}$$

dargestellt wird. Wir fassen den Komplex (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) als Quaternion auf, schreiben also die vorgelegte Gleichung kürzer so:

$$Z_\alpha^2 - Z\tilde{Z} - Z_\omega^2 = 0. \tag{55}$$

Wir betrachten dann (was übrigens ziemlich nebensächlich ist) diese Mannigfaltigkeit von reellen und imaginären Punkten Z als sphärisch (als analog einer Kugel), indem wir die Quotienten

$$\frac{Z_0}{Z_\alpha}, \quad \frac{Z_1}{Z_\alpha}, \quad \frac{Z_2}{Z_\alpha}, \quad \frac{Z_3}{Z_\alpha}, \quad \frac{Z_\omega}{Z_\alpha} \qquad (Z_\alpha \neq 0)$$

als rechtwinklige Kartesische Koordinaten eines eigentlichen Punktes Z deuten (auch für Punkte Z, die der Gleichung (55) nicht genügen). Ist insbesondere $Z_\omega = 0$, so bezeichnen wir die dann noch übrigen Kartesischen Koordinaten mit z_0, z_1, z_2, z_3 und verbinden sie zu einer Quaternion z. Nunmehr können wir *durch stereographische Projektion* aus dem Punkte mit Kartesischen Koordinaten

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad -1$$

unsere Mannigfaltigkeit M_4^2 auf den ebenen Raum $Z_\omega = 0$ und damit auf das Quaternionenkontinuum (z) beziehen. Schreiben wir das Ergebnis der auszuführenden einfachen Rechnung wieder in homogenen Koordinaten, so erhalten wir die Gleichungen

$$(56) \qquad \begin{array}{|c|} \hline Z_\alpha + Z_\omega : Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_\alpha - Z_\omega \\ = \quad 1 \quad : z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : \quad z\tilde{z} \quad , \\ \hline \end{array}$$

oder

$$(57) \qquad \left| \frac{Z_\alpha}{Z_\alpha + Z_\omega} = \frac{1 + z\tilde{z}}{2}, \quad \frac{Z}{Z_\alpha + Z_\omega} = z, \quad \frac{Z_\omega}{Z_\alpha + Z_\omega} = \frac{1 - z\tilde{z}}{2}, \right.$$

die es augenscheinlich machen, daß der uneigentlichen Quaternion $z = \infty$ das Projektionszentrum entspricht, und daß *im reellen Gebiete*, aber auch nur in diesem, die bewirkte Zuordnung eindeutig-umkehrbar ist. Wir haben also eine für reelle Punkte z,

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3$$

und reelle Punkte Z von M_4^2,

$$Z_\alpha : Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_\omega$$

wechselseitige Zuordnung vor uns, die wir als *überall stetig* (mit Einschluß des Projektionszentrums und der Stelle $z = \infty$) betrachten dürfen. Dabei entsprechen offenbar den sphärischen Punktmannigfaltigkeiten des Möbiusschen Kontinuums ebensolche auf der M_4^2, d. h. es entsprechen ihnen ebene Schnitte der M_4^2, und umgekehrt: Man hat nur den Begriff der „sphärischen" Mannigfaltigkeit im Möbiusschen Kontinuum so zu umgrenzen, daß er den Begriff der ebenen Mannigfaltigkeit einschließt (§ 1).

Nach (56) sind sowohl die Koordinaten der reellen Quaternion z als auch ihre Quadratsumme *lineare* Funktionen der Koordinaten der (reellen) Punkte von M_4^2, und zwar solche mit gemeinsamem Nenner.

Die Folge hiervon ist nun, daß eine Vertauschung der Punkte z vermöge einer linearen oder quasi-linearen Quaternionentransformation eine *kollineare* Transformation der Punkte von M_4^2 und damit auch aller Punkte des Raumes R_5 nach sich zieht: *Die Gruppe* Γ_{15}, H_{15} *„induziert" die Gruppe aller reellen kollinearen automorphen Transformationen* G_{15}, H_{15} *der sphärischen Mannigfaltigkeit* M_4^2. Auch diese letzte Gruppe besteht nämlich, wie leicht einzusehen, aus zwei Schichten von Transformationen mit je 15 wesentlichen Parametern (G_{15}, H_{15}); und das allein schon genügt, um nachzuweisen, daß die induzierte Gruppe wirklich die Gesamtgruppe der reellen automorphen Kollineationen von M_4^2 ist. Dasselbe

würde sich übrigens unschwer auch auf andere Art zeigen lassen, nur müßten wir dann einige erst später abzuleitende Formeln hier schon entwickeln.

Wenn es sich um *eigentliche* lineare Quaternionentransformationen und *eigentliche* automorphe Kollineationen von M_4^2 (also solche aus der Gruppe G_{15}) handelt, so sind die entwickelten Formeln, bei zweckmäßiger Verfügung über einen Proportionalitätsfaktor, diese:

$$(58,\,l)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}(a\tilde{a}+b\tilde{b}+c\tilde{c}+d\tilde{d})\cdot Z_\alpha+\\ +(aZ\tilde{b}+b\tilde{Z}\tilde{a})+(cZ\tilde{d}+d\tilde{Z}\tilde{c})-\\ -(a\tilde{a}-b\tilde{b}+c\tilde{c}-d\tilde{d})\cdot Z_\omega\end{matrix}\right\}=Z'_\alpha,\\ &\left\{\begin{matrix}(a\tilde{c}+b\tilde{d})\cdot Z_\alpha+aZ\tilde{d}+\\ +b\tilde{Z}\tilde{c}-(a\tilde{c}-b\tilde{d})\cdot Z_\omega\end{matrix}\right\}=Z',\\ &\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}-(a\tilde{a}+b\tilde{b}-c\tilde{c}-d\tilde{d})\cdot Z_\alpha-\\ -(aZ\tilde{b}+b\tilde{Z}\tilde{a})+(cZ\tilde{d}+d\tilde{Z}\tilde{c})+\\ +(a\tilde{a}-b\tilde{b}-c\tilde{c}+d\tilde{d})\cdot Z_\omega\end{matrix}\right\}=Z'_\omega. \end{aligned}}$$

Dabei wolle man beachten, daß zum Beispiel

$$\begin{aligned}&(aZ\tilde{b}+b\tilde{Z}\tilde{a})+(cZ\tilde{d}+d\tilde{Z}\tilde{c})\\ &=Z(\tilde{b}a+\tilde{d}c)+(\tilde{a}b+\tilde{c}d)\tilde{Z}\\ &=(\tilde{b}a+\tilde{d}c)Z+\tilde{Z}(\tilde{a}b+\tilde{c}d)\end{aligned}$$

ist.

Eine zweite Formelgruppe, die ebensoviel leistet und fast dasselbe aussagt, erhält man, wenn man in allen hier vorkommenden Quaternionenprodukten die Reihenfolge der Faktoren umkehrt und zugleich die Quaternionen a, b, c, d durch die verschwisterten Quaternionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ersetzt. Nennt man dann in dieser zweiten Formelgruppe $(58, r)$ die transformierten Veränderlichen Z_α^* usw., so gelten die Gleichungen

$$(59)\qquad \boxed{\begin{aligned}\nabla_l\cdot\{Z_\alpha^2-Z\tilde{Z}-Z_\omega^2\}&=Z_\alpha'^2-Z'\,\tilde{Z}'-Z_\omega'^2,\\ \nabla_r\cdot\{Z_\alpha^2-\tilde{Z}Z-Z_\omega^2\}&=Z_\alpha^{*2}-\tilde{Z}^*Z^*-Z_\omega^{*2}.\end{aligned}}$$

Beide Gleichungssysteme $(58, l)$ und $(58, r)$ stellen nicht nur *dieselbe Gruppe* G_{15}, sondern auch *dieselbe Kollineation* dieser Gruppe dar. Die Zusammensetzung der Parameter folgt den zuvor beschriebenen Regeln[27]).

Die Gruppe G_{15}, H_{15} besteht, als Kollineationsgruppe, aus Transformationen, die *überall* definiert, stetig und eindeutig umkehrbar sind,

[27]) Weiteres über die Gleichungen (58) und (59) wird man am Schlusse dieses Paragraphen finden.

auch nach Ausdehnung der entwickelten Formeln auf das komplexe Gebiet. Wir haben daher in den durch die Gleichung (55) verbundenen Größen $Z_\alpha \dots Z_\omega$ ein System von Punktkoordinaten vor uns, dem nicht mehr der Mangel anhaftet, der mit dem System $z_0 \dots z_3$ verbunden ist: *Es gibt nun keine singulären Stellen der betrachteten Transformationen mehr, wir haben jetzt eine Definition des „Möbiusschen Kontinuums" vor uns, die auch im komplexen Gebiet noch brauchbar bleibt*[28]).

Zu der Gruppe G_{15}, H_{15} aber, mit der wir es jetzt zu tun haben, gehört eine in ihren Grundzügen wohlbekannte *Invariantentheorie.*

Ich stelle die wichtigsten und hier allein in Betracht kommenden Tatsachen daraus kurz zusammen. Der Leser wird fast alles ohne weiteres verifizieren können, nur die behauptete Vollständigkeit des Invariantensystems bedarf einer Begründung, auf die hier nicht eingegangen werden kann[29]).

Ganze rationale Invariante („relative" Invariante) im System beliebig vieler Punkte $(Z_\alpha^\varkappa \dots Z_\omega^\varkappa)$ gegenüber der Gruppe G_{15}, H_{15} heißt eine ganze rationale Funktion der Koordinaten dieser Punkte, $Z_\alpha^\varkappa \dots Z_\omega^\varkappa$, die nach Ausführung einer beliebigen Transformation (58, l) oder (58, r) mit einem Faktor reproduziert wird, der nur von den Parametern der Transformation abhängt. Dieser Faktor ist dann entweder (je nach der Darstellung) eine Potenz von ∇_l oder ∇_r mit positivem ganzzahligem Exponenten, oder er unterscheidet sich von einer solchen Potenz um den Faktor -1, wie sogleich noch genau angegeben werden wird. Jede solche Invariante selbst aber ist eine ganze rationale Funktion gewisser „elementarer" Invarianten derselben Art, deren es zwei „Typen" gibt: *Symmetrische bilineare Invarianten* und *alternierende Invarianten* (*Determinanten*), von denen die letzten aus den Koordinaten von je 6 Punkten gebildet sind. Es sind die folgenden:

$$\{X \mid Y\} = X_\alpha Y_\alpha - \frac{1}{2}(X\tilde{Y} + Y\tilde{X}) - X_\omega Y_\omega, \tag{60}$$

$$\{Z_{(1)}, Z_{(2)}, \dots, Z_{(6)}\} = \begin{vmatrix} Z_\alpha^1, & Z_0^1, & \dots, & Z_3^1, & Z_\omega^1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ Z_\alpha^6, & Z_0^6, & \dots, & Z_3^6, & Z_\omega^6 \end{vmatrix}. \tag{61}$$

[28]) Nach meiner Terminologie bilden die (komplexen) Punkte der quadratischen Mannigfaltigkeit M_4^2 ein zur Gruppe Γ_{15}, H_{15} oder G_{15}, H_{15} gehöriges *natürliches Kontinuum.* Es ist das sogar in gewissem Sinne das einzige. (Siehe Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, § 27, besonders S. 272 und 282.)

[29]) Leipziger Berichte 1897, S. 443 ff. Eine umfassendere Darstellung ist im Druck. (Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung. Braunschweig, 1923, § 12 u. ff.)

Sie verhalten sich gegenüber Transformationen von G_{15} und H_{15} wie folgt:

$$\nabla_i \cdot \{X \mid Y\} = \{X' \mid Y'\}, \quad \nabla_i \cdot \{X \mid Y\} = \{X^* \mid Y^*\}, \tag{62}$$

$$\begin{aligned} \nabla_i^3 \cdot \{Z_{(1)} \dots Z_{(6)}\} &= \{Z'_{(1)} \dots Z'_{(6)}\}, \\ -\nabla_i^3 \cdot \{Z_{(1)} \dots Z_{(6)}\} &= \{Z^*_{(1)} \dots Z^*_{(6)}\}. \end{aligned} \tag{63}$$

Alle zwischen solchen Invarianten bestehenden identischen Gleichungen sind ferner eine Folge von zweien, nämlich

$$\begin{aligned} &\{1\ 2 \dots 5\ 6\}\{0 \mid x\} + \{2\ 3 \dots 6\ 0\}\{1 \mid x\} \\ &\quad + \dots + \{0\ 1 \dots 4\ 5\}\{6 \mid x\} = 0, \end{aligned} \tag{64}$$

$$\{1 \dots 6\}\{\underline{1} \dots \underline{6}\} + \left|\{1 \mid \underline{1}\} \dots \{6 \mid \underline{6}\}\right| = 0. \tag{65}$$

Aus diesen Invarianten entstehen nun, wenn wir in dem Umfange, wie es eindeutig möglich ist, durch stereographische Projektion zu Punktkoordinaten $z_0 \dots z_3$ übergehen, wiederum ganze Funktionen, die nun — gegenüber der Gruppe Γ_{15}, H_{15} — ebenfalls noch die Invarianteneigenschaft haben, aber eine solche von verwickelterer Art. Wir finden

$$\frac{\{X \mid Y\}}{(X_\alpha + X_\omega)(Y_\alpha + Y_\omega)} = \frac{1}{2} N(y - x), \tag{66}$$

und, wenn

$$\begin{vmatrix} z^1 \tilde{z}^1, & z_0^1, & \dots, & z_3^1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ z^6 \tilde{z}^6, & z_0^6, & \dots, & z_3^6, & 1 \end{vmatrix} = [z_{(1)} \dots z_{(6)}]$$

gesetzt wird,

$$\frac{\{Z_{(1)} \dots Z_{(6)}\}}{\Pi(Z_\alpha + Z_\omega)} = \frac{1}{2}[z_{(1)} \dots z_{(6)}]. \tag{67}$$

Die Identitäten (64) und (65) lassen sich dann ohne weiteres auf diese neuen Größen übertragen. An Stelle von (65) erhält man

$$[x_{(1)} \dots x_{(6)}] \cdot [y_{(1)} \dots y_{(6)}] + 4 \cdot |N(y_{(1)} - x_{(1)}) \dots N(y_{(6)} - x_{(6)})| = 0. \tag{68}$$

Da ferner nach (58)

$$(c\tilde{c} + d\tilde{d}) Z_\alpha + (c Z \tilde{d} + d \tilde{Z} \tilde{c}) - (c\tilde{c} - d\tilde{d}) Z_\omega = Z'_\alpha + Z'_\omega$$

ist, so erhält man noch

$$\boxed{\frac{\nabla_i \cdot N(y-x)}{N(cx+d)\,N(cy+d)} = N(y' - x')} \tag{69}$$

und eine gleichlautende Formel im Falle einer Transformation der Schicht H_{15}, sowie

$$(70)\qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{\nabla^3_{ll'}\cdot[z_{(1)}\dots z_{(6)}]}{\Pi N(cz+d)} &= [z'_{(1)}\dots z'_{(6)}],\\ -\frac{\nabla^3_{ll'}\cdot[z_{(1)}\dots z_{(6)}]}{\Pi N(cz+d)} &= [z^*_{(1)}\dots z^*_{(6)}]. \end{aligned}}$$

Die Formel (69) ist identisch mit unserer früheren Nr. 50, (70) aber sagt etwas Neues aus: Wir sehen daraus, wie die Transformationen der Nebenschicht H_{15} von denen der Hauptschicht Γ_{15} unterschieden werden können.

In der Entwickelung der Determinante $[z_{(1)}\dots z_{(6)}]$ treten, im Gegensatz zu allen unseren bisherigen Entwickelungen, die Koordinaten von Quaternionen einzeln auf. Man wird das als einen Mangel empfinden. Indessen kann man diesem kleinen Übelstand leicht abhelfen. Nach Schrutka von Rechtenstamm läßt sich die aus den Koordinaten von irgend vier Quaternionen p, q, r, s gebildete Determinante wie folgt ausdrücken[30]):

$$(71)\qquad \begin{aligned} |p_0q_1r_2s_3| &= (pqrs)\\ &= \tfrac{1}{4}\{(p\tilde{q}s\tilde{r}+r\tilde{s}q\tilde{p})-(p\tilde{r}s\tilde{q}+q\tilde{s}r\tilde{p})\}\\ &= \text{usw.} \end{aligned}$$

Es ist also

$$(72)\qquad \begin{aligned} &4(pqrs)\\ &= N(p\tilde{r}-q\tilde{s})-N(\tilde{r}p-\tilde{s}q)\\ &= N(p\tilde{s}-r\tilde{q})-N(\tilde{s}p-\tilde{q}r)\\ &= N(p\tilde{q}-s\tilde{r})-N(\tilde{q}p-\tilde{r}s)\\ &= \left\{\begin{matrix}pq\\rs\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}pr\\qs\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}pr\\sq\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}ps\\rq\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}ps\\qr\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}pq\\sr\end{matrix}\right\}. \end{aligned}$$

Für das Folgende ist es sehr wesentlich, auf den Teil des (erweiterten) Möbiusschen Kontinuums zu achten, der nicht durch die Quaternionenkoordinaten z_0, z_1, z_2, z_3 dargestellt werden kann. Es ist das der Durchschnitt der Mannigfaltigkeit M_4^2 mit dem Tangentialraum des Projektionszentrums, also mit der linearen Mannigfaltigkeit

$$Z_\alpha + Z_\omega = 0.$$

[30]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Math.-naturw. Abt., 1906, S. 739 ff. Zitiert nach H. Rothe, Math. Enc. III A B 11 (!), S. 1313. — Die Determinante $|p_0q_1r_2s_3|$ ist dort, abweichend von unserem Texte, mit $-(pqrs)$ bezeichnet.

Diese Schnittfigur ist reell, sie enthält aber nur einen einzigen reellen Punkt, eben das Projektionszentrum. Alle ihre anderen Punkte entziehen sich der Darstellung durch eigentliche oder uneigentliche Quaternionen z. Wir nennen diese Punkte (zu denen wir also das Projektionszentrum $z = \infty$ *nicht* rechnen) *akzessorische Punkte*, ihren Inbegriff *das akzessorische Gebiet des Möbiusschen Kontinuums*. Es bedeckt nahezu einen quadratischen Kegel von drei komplexen Dimensionen, dessen Projektion in das *projektive* Punktkontinuum des Raumes R_4 eine im uneigentlichen Gebiet R_3 von R_4 gelegene reelle Fläche zweiter Ordnung ist. Die Punkte dieses Kegels sind paarweise konjugiert-imaginär, abgesehen von dem nicht „akzessorischen" Scheitel des Kegels. Dieser Kegel ist ferner Träger von $2 \cdot \infty^{2 \cdot 1}$ Ebenen, die auf zwei reelle Scharen verteilt sind. Die Ebenen einer jeden Schar sind paarweise konjugiert-imaginär, und jede Schar bildet ein projektives Kontinuum von einer komplexen Dimension. Durch jede der $\infty^{2 \cdot 2}$ Geraden, die auf dem Kegel liegen und durch dessen Scheitel gehen, geht eine Ebene der einen und eine Ebene der anderen Schar.

Das alles folgt unmittelbar aus dem, was soeben über die Projektion des betrachteten Kegels gesagt worden ist. *Es ergibt sich daraus, daß sich sogar gewisse reelle Figuren der Darstellung durch die Quaternionen teilweise oder auch ganz entziehen.* Es gibt schon reelle Punktepaare der Art; nur solche Paare von Punkten, die einzeln reell sind, haben notwendig Bilder im Quaternionengebiet. Das akzessorische Gebiet ist nun eine gegenüber G_{15} nicht-invariante Mannigfaltigkeit. Das hat gewisse Umständlichkeiten im Gefolge, mit denen wir uns werden abfinden müssen.

Von den Transformationsgleichungen (58) kann man leicht zur Gruppe G_{15}^*, H_{15}^* der automorphen linearen Transformationen der senären quadratischen Form

$$Z_a^2 - Z\tilde{Z} - Z_\omega^2$$

übergehen. Wie (59) zeigt, kommt man dann aber nicht mehr mit rationalen Operationen aus, sondern man muß die Wurzelgröße $\sqrt{\nabla_l}$ in den zu betrachtenden Rationalitätsbereich aufnehmen.

In seiner bekannten Untersuchung über Summen von Quadraten, über die in der Mathematischen Encyklopädie in den Artikeln von Cartan und Rothe berichtet wird, hat R. Lipschitz die automorphen linearen Transformationen solcher nichtsingulärer quadratischer Formen *erschöpfend* darzustellen gelehrt, die als Summen von n Quadraten bilinearer Formen mit positiven oder negativen Vorzeichen der einzelnen Glieder dargestellt sind. Dazu werden überzählige homogene Parameter gebraucht, sobald $n > 3$ ist, und zwar 32 Parameter im Falle $n = 6$. Eine Irrationalität wird dabei nicht benutzt: Die (bedeutende) Vereinfachung, die hier gegenüber der umfassenderen Theorie von Lipschitz erreicht ist, beruht eben auf Einführung einer Wurzelgröße.

Im komplexen Gebiet kommt man dem Gesagten zufolge hier mit 16 unabhängigen homogenen Parametern aus. Verlangt man aber, die reellen automorphen Transformationen einer reellen quadratischen Form von sechs Veränderlichen *reell*

darzustellen, so gibt es nur zwei Fälle, in denen sich eine solche Reduktion erreichen läßt. Der eine ist der hier behandelte der quadratischen Formen vom Trägheitsindex 1. Der andere wird gebildet von den senären quadratischen Formen vom Trägheitsindex 3. In diesem Fall kann die quadratische Form als linke Seite der in der projektiven Liniengeometrie auftretenden Plückerschen Gleichung gedeutet werden. Man braucht wiederum eine Quadratwurzel, und es sind, wie hier, zwei wesentlich verschiedene „verschwisterte" — nämlich kontragrediente — Darstellungen der gesuchten Transformationen vorhanden. Die zu unserer Gruppe G_{15}, H_{15} analoge Gruppe umfaßt vier Schichten, $4 \cdot \infty^{15}$ reelle Transformationen. Diese sind Bilder der $4 \cdot \infty^{15}$ reellen Kollineationen und Korrelationen im dreidimensionalen Punktkontinuum der projektiven Geometrie. Jede dieser Transformationen kann auf *zwei* Arten durch 16 reelle unabhängige homogene Parameter dargestellt werden, je nachdem man von Transformationen der Punkte oder von Transformationen der Ebenen ausgeht. Das Seitenstück dazu ist die doppelte Darstellung der Gruppe G_{15}, H_{15} durch reelle verschwisterte Quaternionenquadrupel. (Vgl. § 11.)

Es erhebt sich die interessante Frage, ob nicht auch für gewisse höhere Werte der Zahl n die Lipschitzschen Formeln sich durch solche ersetzen lassen, die zwar nicht nur unabhängige Parameter enthalten werden, wohl aber eine verminderte Zahl von Parametern. Das würde ein besonderes Interesse haben im Falle $n = 8$, da die automorphen Kollineationen einer M_6^2 im projektiven R_7 in einer ganz ähnlichen Beziehung zur Kinematik in Euklidischen und Nicht-Euklidischen dreidimensionalen Räumen stehen wie die automorphen Kollineationen einer M_4^2 in R_5 zur projektiven Liniengeometrie. (Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1913, S. 36 ff.)

(Fortsetzung folgt.)

(Eingegangen am 26. September 1922.)

Über die Randwerte einer analytischen Funktion.

Von

Friedrich Riesz in Szeged.

Einleitung.

Es sei $f(z)$ eine innerhalb des Einheitskreises regulär analytische Funktion; δ sei eine positive Zahl. Der Mittelwert

$$\mu_\delta(r) = \mu_\delta(f; r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta \, d\theta \qquad (r<1)$$

ist, laut einem Satze von Herrn Hardy, eine wachsende Funktion von r[1]) und es bestehen daher die folgenden beiden Möglichkeiten: entweder wächst $\mu_\delta(r)$ für $r \to 1$ ins Unendliche, oder aber ist $\mu_\delta(r)$ beschränkt und strebt dann für $r \to 1$ gegen einen Grenzwert $\mu_\delta^* = \mu_\delta^*(f)$. Im letzteren Falle wollen wir sagen, die Funktion $f(z)$ gehöre zur Klasse H_δ. Aus der bekannten Verallgemeinerung der Schwarzschen Ungleichung oder auch aus der für jedes positive x bestehenden Ungleichung

$$x^{\delta'} < 1 + x^\delta \qquad (0 < \delta' < \delta)$$

folgt, daß sobald $\delta' < \delta$, die Klasse $H_{\delta'}$ die Klasse H_δ enthält. Die beschränkten Funktionen sind in sämtlichen Klassen H_δ enthalten.

Im § 1 der vorliegenden Arbeit beweise ich den folgenden

Satz I (Zerlegungssatz). *Für jede Funktion $f(z)$ der Klasse H_δ gibt es eine Zerlegung in zwei Faktoren: $f(z) = g(z)\,h(z)$ derart, daß $h(z)$ für $|z|<1$ regulär und beschränkt ist, während $g(z)$ der Klasse H_δ angehört und für $|z|<1$ nirgends verschwindet.*

Durch diese Zerlegung läßt sich die Untersuchung der Randwerte der Funktionen der Klasse H_δ auf den prägnantesten Fall $\delta = 2$ zurück-

[1]) G. H. Hardy: On the mean value of the modulus of an analytic function, Proceedings of the London Math. Soc., ser. 2, **14** (1915), S. 269–277.

führen. In den §§ 2 bis 4 werde ich auf diese Art bekannte und neue Resultate herleiten.

Den Satz I habe ich gelegentlich eines Briefwechsels mit Herrn G. Szegö bewiesen. Die ersten beiden Briefe, ein Brief von Szegö (19. 3. 1920) und meine Antwort (31. 3. 1920) habe ich der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt (19. 4. 1920), in deren Berichten sie auch in ungarischer Sprache erschienen sind[2]). Mein Brief enthält den Beweis des Satzes für den Fall $\delta = 1$. Den Fall eines beliebigen $\delta > 0$ habe ich in einem weiteren Briefe (7. 5. 1920) behandelt; der vollständige Briefwechsel — je 2 Briefe — hat in deutscher Übersetzung der Redaktion der Mathematischen Annalen vorgelegen, wurde aber aus redaktionellen Gründen durch Herrn Szegö in eine einzige Arbeit umgeformt[3]), wobei mein Anteil auf mein Verlangen nicht in extenso aufgenommen, sondern nur mit einigen Worten angedeutet wurde.

Der dem Satze I analoge Satz für den Fall einer beschränkten Funktion ist in einer Arbeit von Herrn Blaschke implizit enthalten[4]).

§ 1.

Beweis des Zerlegungssatzes.

Verschwindet $f(z)$ für $|z| < 1$ nicht, so liefert $g(z) = f(z)$, $h(z) = 1$ die gewünschte Zerlegung. Sonst seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die innerhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstellen von $f(z)$, wobei mehrfache Nullstellen entsprechend oft angeführt sind. Nehmen wir zunächst an, daß $f(0) \neq 0$. Wir setzen

$$h_n(z) = \prod_{k=1}^{n} |\alpha_k| \frac{1 - \frac{z}{\alpha_k}}{1 - \bar{\alpha}_k z}, \quad g_n(z) = \frac{f(z)}{h_n(z)}.$$

Die Funktionen $h_n(z)$ und $g_n(z)$ sind innerhalb des Einheitskreises regulär. Auf dem Kreise selbst ist bekanntlich $|h_n(z)| = 1$; also ist für jedes bestimmte n und für jedes positive ε

$$|h_n(re^{i\theta})| \geqq 1 - \varepsilon,$$

sobald r genügend nahe an 1 liegt. Folglich ist auch

$$\mu_\delta(g_n; r) \leqq (1 - \varepsilon)^{-\delta} \mu_\delta(f; r) \leqq (1 - \varepsilon)^{-\delta} \mu_\delta^*(f),$$

[2]) G. Szegö und F. Riesz: Analytikus függvény kerületi értékeiről, Math. és term. értesitö **38** (1920), S. 113–127.

[3]) G. Szegö: Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Math. Annalen **84** (1921), S. 232–244.

[4]) W. Blaschke: Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen, Berichte d. sächs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse, **67** (1915), S. 194–200.

wo $\mu_\delta^*(f)$ die obere Schranke der Mittelwerte $\mu_\delta(f;r)$ bedeutet und r genügend nahe an 1 liegt. Nach dem Hardyschen Satze ist dann a fortiori für jedes $r<1$

$$\mu_\delta(g_n;r) \leqq (1-\varepsilon)^{-\delta}\,\mu_\delta^*(f)$$

und da der linksstehende Mittelwert nicht von ε abhängt, so ist auch

$$\mu_\delta(g_n;r) \leqq \mu_\delta^*(f). \tag{1}$$

Im Falle einer endlichen Anzahl von Nullstellen: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hat man hiermit schon die gewünschte Zerlegung, nämlich $f(z) = g_n(z)\,h_n(z)$. Im Falle unendlich vieler Nullstellen ist nach (1)

$$|g_n(0)|^\delta = \mu_\delta(g_n;0) \leqq \mu_\delta^*(f);$$

andererseits ist

$$g_n(0) = \frac{f(0)}{h_n(0)} = \frac{f(0)}{|\alpha_1 \ldots \alpha_n|},$$

also folgt

$$|\alpha_1 \ldots \alpha_n| \geqq |f(0)|\,\{\mu_\delta^*(f)\}^{-\frac{1}{\delta}}$$

für jedes n und damit die unbedingte Konvergenz des unendlichen Produktes $\Pi|\alpha_k|$.[5]) Nach Herrn Blaschke ist dann auch das unendliche Produkt

$$h(z) = \lim_{n=\infty} h_n(z) = \prod_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|\,\frac{1-\frac{z}{\alpha_k}}{1-\bar{\alpha}_k z}$$

für $|z|<1$ unbedingt und auf jedem Kreise $|z| \leqq r < 1$ gleichmäßig konvergent[6]); die Funktion $h(z)$ ist regulär und es ist $|h(z)| \leqq 1$. Die Funktion $h(z)$ hat genau dieselben Nullstellen wie $f(z)$, also ist für $|z|<1$ die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{h(z)}$$

regulär und von Null verschieden. Ferner konvergieren die Funktionen $g_n(z)$ gegen $g(z)$ und zwar gleichmäßig auf jedem Kreise $|z| \leqq r < 1$; also folgt auf Grund von (1), daß auch

$$\mu_\delta(g;r) \leqq \mu_\delta^*(f). \tag{2}$$

Damit ist unser Satz bis auf die einschränkende Annahme $f(0) \neq 0$

---

[5]) Dasselbe folgt auch aus der sogenannten Jensenschen Formel; vgl. P. Fatou: Sur l'évanouissement d'une branche de fonction uniforme aux points d'une ligne singulière, Bulletin des sciences math., mars 1921.

[6]) Blaschke, l. c. [4]); vgl. auch E. Landau: Über die Blaschkesche Erweiterung des Vitalischen Satzes, Berichte d. sächs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse, 70 (1918), S. 156—159.

bewiesen. Ist nun $f(0) = 0$, so setzen wir $f(z) = z^m f_1(z)$, wo $f_1(z)$ für $z = 0$ regulär nnd $\neq 0$ ist. Dann ist

$$\mu_\delta(f_1; r) = r^{-m\delta}\mu_\delta(f; r) \to \mu_\delta^*(f) \qquad (r \to 1);$$

daraus folgt $\mu_\delta^*(f_1) = \mu_\delta^*(f)$ und speziell, daß auch $f_1(z)$ der Klasse H_δ angehört. Die Faktorenzerlegung $f_1(z) = g(z)h(z)$ ergibt dann für $f(z)$ die Zerlegung in $g(z)$ und $z^m h(z)$.

Es sei noch bemerkt, daß in jener Verallgemeinerung des Hardyschen Satzes, den ich vor kurzem mitteilte[7]), als Spezialfall auch das Anwachsen der Mittelwerte des positiven Teiles von $\log|f(z)|$, d. h. der Funktion von r

$$h(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{|f|>1} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

enthalten ist. Daraus folgt ebenso, wie Satz I, der analoge Satz *für die sämtliche Klassen H_δ umfassende Klasse jener Funktionen, für welche der letztgenannte Mittelwert beschränkt ist.*

§ 2.

Existenz der Randwerte.

Es werde nun die Funktion $f(z)$ der Klasse H_δ dem Satze I entsprechend in die Faktoren $g(z)$ und $h(z)$ zerlegt. Da $g(z)$ im Einheitskreise nirgends verschwindet, so läßt sich daselbst eine eindeutige Bestimmung $\gamma(z)$ von $\{g(z)\}^{\frac{\delta}{2}}$ festlegen. Die Funktion $\gamma(z)$ gehört dann zur Klasse H_2; die Funktion $h(z)$ ist beschränkt und gehört somit jedenfalls zur Klasse H_2.

Setzen wir

$$\gamma(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

dann erhält man für den entsprechenden Mittelwert auf Grund der Parsevalschen Formel[8])

$$\mu_2(\gamma; r) = |a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + \ldots$$

und aus der Beschränktheit von $\mu_2(\gamma; r)$ folgt somit die Konvergenz der Reihe $\Sigma|a_k|^2$. Nach dem sogenannten Riesz-Fischerschen Satze gibt

[7]) F. Riesz: Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques, Acta univers. hung. Francisco-Jos. **1** (1922), S. 27–32. Zur Zeit des in der Einleitung erwähnten Briefwechsels besaß ich diese Verallgemeinerung noch nicht und konnte auch den Zerlegungssatz für den logarithmischen Fall nicht beweisen. Meine Aufmerksamkeit wurde vor kurzem durch Herrn A. Ostrowski wieder auf diesen Fall gelenkt.

[8]) Anstatt der Parsevalschen Formel genügt hier auch die Besselsche Ungleichung.

es daher eine nebst dem Quadrate ihres absoluten Betrages integrierbare Funktion $\gamma(e^{i\theta})$, deren formal gebildete Fouriersche Entwicklung, nach den Potenzen von $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ geordnet, für $z = e^{i\theta}$ mit der obigen Potenzreihe übereinstimmt[9]). Die so definierte Funktion $\gamma(e^{i\theta})$ ist nach Lebesgue fast überall gleich dem Differentialquotienten ihres Integrals[10]) und daher nach Fatou zugleich Randwert der Funktion $\gamma(z)$,[11]) und zwar bei Annäherung innerhalb eines beliebigen Sehnenwinkels, also speziell Grenzwert, für $r \to 1$, der Funktion $\gamma(re^{i\theta})$. Aus demselben Grunde existiert auch fast überall der Randwert von $h(z)$ und somit auch fast überall der Randwert $f(e^{i\theta})$ von $f(z)$. Es besteht also der

Satz II. *Jede Funktion $f(z)$, die einer Klasse H_δ angehört, besitzt, bei radialer Annäherung an den Einheitskreis, fast überall Randwerte.*

Für $\delta < 1$ ist dieser Satz meines Wissens neu. Für $\delta \geqq 1$ folgt er bekanntlich auch aus der Tatsache, daß die Integralfunktion eine Randfunktion von beschränkter Schwankung besitzt; für $\delta < 1$ ist dies aber nicht mehr notwendig der Fall.

§ 3.

Der Szegösche Satz.

Herr Szegö hat für den Fall $\delta = 2$ und $f(z) \not\equiv 0$ die Integrierbarkeit von $\log|f(e^{i\theta})|$ bewiesen[12]); in diesem Resultat ist speziell auch die Tatsache enthalten, daß *die Randwerte nur auf einer Nullmenge verschwinden können*[13]). Obzwar diese Sätze, wie Herr Fatou für den Nullmengensatz gezeigt hat[14]) und wie ich es für den Szegöschen Satz an anderer Stelle ausführe[15]), *auch im allgemeinen Falle $\delta > 0$* fast unmittelbar aus der Jensenschen Formel folgen, so darf ich hier vielleicht doch bemerken, daß gerade diese Entdeckung von Szegö uns den Anlaß zu dem in der Einleitung angeführten Briefwechsel und speziell mir zur Aufstellung von Satz I gab. Durch diesen Zerlegungssatz wird nämlich

[9]) F. Riesz: Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, Comptes rendus **144** (1907), S. 615–619; E. Fischer: Sur la convergence en moyenne, ebenda S. 1022–1024.

[10]) H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris 1904, S. 124.

[11]) P. Fatou: Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta math. **30** (1906), S. 335–400, insbes. 348 u. 357.

[12]) Szegö, l. c. [2]) [3]).

[13]) F. u. M. Riesz: Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Compte rendu du quatrième congrès des math. scandinaves à Stockholm (1916), S. 27–44, insbes. S. 32.

[14]) Fatou, l. c. [5]).

[15]) F. Riesz: Sur les suites de fonctions analytiques, erscheint in Acta Univers. hung. Francisco-Jos. **1** (1922), Fasc. 2; vgl. auch l. c. [2]) u. [3]).

auch hier der allgemeine Fall auf den Spezialfall $\delta = 2$ zurückgeführt, da ja $\log|f(e^{i\theta})| = \frac{2}{\delta}\log|\gamma(e^{i\theta})| + \log|h(e^{i\theta})|$ ist und die Funktionen γ und h in der Klasse H_2 enthalten sind.

§ 4.

Starke Konvergenz und Anwendungen.

Nach der Parsevalschen Formel ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\gamma(e^{i\theta}) - \gamma(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2(1-r^k)^2;$$

diese Summe und somit auch das linksstehende Integral streben, für $r \to 1$, gegen Null, d. h. die Funktion $\gamma(re^{i\theta})$ konvergiert nicht nur in gewöhnlichem Sinne fast überall gegen $\gamma(e^{i\theta})$, sondern auch dem Mittelwerte nach („en moyenne"), oder anders ausgedrückt, stark in bezug auf den Exponenten 2 [16]). Es soll nun gezeigt werden, daß auch allgemein $f(re^{i\theta})$ stark gegen die Randfunktion $f(e^{i\theta})$ konvergiert und zwar in bezug auf den Exponenten δ, [17]) d. h. es soll die Limesgleichung

$$\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^\delta d\theta \to 0 \qquad (r \to 1) \tag{3}$$

bewiesen werden. Es genügt offenbar, diese Limesgleichung für jede beliebige Folge $r_n \to 1$ zu beweisen.

Wir leiten zunächst aus der Zerlegung $f = gh = \gamma^{\frac{2}{\delta}}h$ die scheinbar weniger aussagende Limesgleichung

$$\int_M |f(r_n e^{i\theta})|^\delta d\theta \to \int_M |f(e^{i\theta})|^\delta d\theta \tag{4}$$

ab, wo M eine beliebige meßbare Menge von θ-Werten $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ bedeutet. Für die Differenz D der beiden Integrale ist, wenn wir die kürzere Schreibweise

$$h_n = h(r_n e^{i\theta}), \quad h = h(e^{i\theta}), \quad \gamma_n = \gamma(r_n e^{i\theta}), \quad \gamma = \gamma(e^{i\theta})$$

einführen,

$$D = \int_M \{|h|^\delta |\gamma|^2 - |h_n|^\delta |\gamma_n|^2\} d\theta$$
$$= \int_M \{|h|^\delta - |h_n|^\delta\}|\gamma|^2 d\theta - \int_M |h_n|^\delta \{|\gamma|^2 - |\gamma_n|^2\} d\theta;$$

[16]) Vgl. Fischer, l. c. [9]); F. Riesz: a) Sur les suites de fonctions mesurables, Comptes rendus **148** (1909), S. 1303—1305, b) Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen **69** (1910), S. 449—497, insbes. S. 464.

[17]) Vgl. Riesz, l. c. [16]).

gelingt es uns zu zeigen, daß die beiden rechtsstehenden Integrale gegen 0 streben, so ist damit (4) bewiesen. Es sei $|h(re^{i\theta})| \leqq 1$, was wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, und was übrigens für die in § 1 benützte Blaschkesche Funktion tatsächlich der Fall ist, so ist der Integrand im ersten Integral dem absoluten Betrage nach $\leqq |\gamma_n|^2$, also $\leqq$ einer integrierbaren Funktion und strebt wegen $h_n \to h$ fast überall gegen Null; somit strebt nach Lebesgue auch das Integral gegen Null[18]). Der Integrand im zweiten Integral ist dem absoluten Betrage nach $\leqq ||\gamma|^2 - |\gamma_n|^2| \leqq |\gamma^2 - \gamma_n^2| = |\gamma - \gamma_n|\,|\gamma + \gamma_n|$; also ist auf Grund der Schwarzschen Ungleichung und zufolge (2) das Quadrat des Integrals

$$\leqq \int_M |\gamma - \gamma_n|^2 d\theta \int_M |\gamma + \gamma_n|^2 d\theta \leqq 4\mu_\delta^*(f) \int_M |\gamma - \gamma_n|^2 d\theta \to 0.$$

Damit ist die Limesgleichung (4) bewiesen. Um daraus (3) zu erhalten, machen wir vom bekannten Satze des Herrn Egoroff Gebrauch[19]). Da nämlich die Funktionen $f_n = f(r_n e^{i\theta})$ fast überall gegen $f = f(e^{i\theta})$ konvergieren, so gibt es nach diesem Satze Mengen M von beliebig kleinem Inhaltsmaße derart, daß auf der Komplementärmenge die Konvergenz eine gleichmäßige ist. Da ferner das Integral der integrierbaren Funktion $|f|^\delta$ auf genügend kleinen Mengen M beliebig klein wird, so können wir, wenn irgendeine beliebig kleine positive Zahl ε vorliegt, die Menge M des Egoroffschen Satzes so gewählt denken, daß

$$\int_M |f|^\delta d\theta < \varepsilon$$

ausfällt. Wegen (4) ist dann auch für genügend große n

$$\int_M |f_n|^\delta d\theta < \varepsilon$$

und damit (da $|a+b|^\delta \leqq 2^\delta(|a|^\delta + |b|^\delta)$ ist)

$$\int_M |f - f_n|^\delta d\theta < 2^{\delta+1}\varepsilon.$$

Das entsprechende Integral auf der Komplementärmenge wird — zufolge der gleichmäßigen Konvergenz — für große n beliebig klein, z. B. $< \varepsilon$, also wird für genügend große n das gesamte Integral $< 2^{\delta+1}\varepsilon + \varepsilon$, d. i. beliebig klein. Damit ist die Limesgleichung (3) bewiesen. Wir haben also den

Satz III. *Die Funktion $f(z) = f(re^{i\theta})$ der Klasse H_δ konvergiert in bezug auf den Exponenten δ stark gegen ihre Randfunktion.*

---

[18]) H. Lebesgue: Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm, Bulletin de la soc. math. de France **36** (1908), S. 3—19, insbes. S. 11.

[19]) D. Th. Egoroff: Sur les suites de fonctions mesurables, Comptes rendus **152** (1911), S. 244—246.

Die Ausführungen dieses Paragraphen ergeben noch nebenbei folgende Resultate:

a) Aus (4) folgt, indem man $M = (0, 2\pi)$ setzt, der *stetige Anschluß der Hardyschen Mittelwerte für* $r \to 1$.

b) Wendet man dies auf die Funktionen f und g in § 1 an, so folgt auf Grund der Ungleichung (2):

$$\int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^\delta d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^\delta d\theta.$$

Wegen $|h(z)| \leqq 1$, also $|g(z)| \geqq |f(z)|$ kann in dieser Integralungleichung nur das Gleichheitszeichen gelten und es muß fast überall $|g(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})|$ sein. Dies ist gleichbedeutend mit der auch auf direktem Wege leicht beweisbaren Eigenschaft der Blaschkeschen Funktion $h(z)$, daß *ihre Randwerte dem absoluten Betrage nach fast überall gleich* 1 *sind*[20]).

c) Aus (3) folgt leicht das Bestehen der Cauchyschen Integralformeln bei Integration längs des Randes, sobald nur $\delta \geqq 1$ ist, also unter der allgemeinsten Bedingung, denn für $\delta < 1$ haben ja die entsprechenden Integrale im allgemeinen keinen Sinn.

Dasselbe gilt von der Poissonschen Integralformel. Aus dieser aber ergibt sich durch Anwendung des ersten Mittelwertsatzes sofort der folgende Satz, jedenfalls zunächst nur für $\delta \geqq 1$:

Sind die Randwerte einer Funktion $f(z)$ *der Klasse* H_δ *dem absoluten Betrage nach fast überall* $\leqq 1$, *so ist auch überall im Einheitskreise* $|f(z)| \leqq 1$.

Für den Fall $\delta = 2$ ist dieser Satz durch Herrn I. Schur aufgestellt und bewiesen worden[21]). Der Fall eines beliebigen $\delta > 0$, also auch der zunächst ausgeschlossene Fall $\delta < 1$, läßt sich durch die Zerlegung $f = \gamma^{\frac{2}{\delta}} h$ ($|h(z)| \leqq 1$, $|h(e^{i\theta})|$ fast überall gleich 1) auf den Spezialfall $\delta = 2$ zurückführen, da nämlich die Voraussetzungen des Satzes auch für $\gamma(z)$ erfüllt sind.

d) Die Limesgleichung (3) ist bekanntlich gleichwertig mit der folgenden, in welcher die Randwerte nicht mehr vorkommen:

$$(3') \qquad \int_0^{2\pi} |f(r_m e^{i\theta}) - f(r_n e^{i\theta})|^\delta d\theta \to 0 \qquad (r_m \to 1,\ r_n \to 1).\ ^{22})$$

[20]) Ich habe diese Eigenschaft von $h(z)$ im zweiten der in Einleitung erwähnten Briefe an Herrn Szegö angegeben, laut einer brieflichen Mitteilung ist sie unabhängig auch von Herrn Fatou bemerkt worden.

[21]) I. Schur: Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung), Journal für r. u. a. Math. **148** (1918), S. 122—145, insbes. 131—133.

[22]) Vgl. für $\delta = 2$: Fischer, l. c. [9]); für beliebiges $\delta > 0$; Riesz, l. c. [16a]).

Wir wollen diese Bemerkung auf den folgenden Fall anwenden: Sei $F(z)$ eine für $|z| < 1$ analytisch reguläre Funktion, für welche die Totalschwankung $T(r)$ längs der Kreise $|z| = r < 1$ für $r \to 1$ beschränkt bleibt. Da $T(r) = 2\pi\ \mu_1(f; r)$, wo $f(z) = zF'(z)$ ist, so gehören $f(z)$ und auch der Differentialquotient $F'(z)$ zur Klasse H_1 und die Gleichung (3′) besagt für diesen Fall, daß die Totalschwankung von $F(r_m e^{i\theta}) - F(r_n e^{i\theta})$ für $r_m \to 1$, $r_n \to 1$ gegen Null strebt. Daraus folgt aber:

Erstens: *Die gleichmäßige Konvergenz von $F(re^{i\theta})$ gegen eine Randfunktion $F(e^{i\theta})$ und damit die Stetigkeit von $F(z)$ auf der abgeschlossenen Kreisfläche* $|z| \leqq 1$, sobald die Konvergenz von $F(re^{i\theta})$ gegen einen Randwert an einer einzigen Stelle $\theta = \theta_0$ feststeht. Nun ergibt sich die Konvergenz nicht nur an einer einzigen Stelle, sondern auch fast überall aus der Beschränktheit von $F(z)$, die wiederum aus der bekannten Tatsache folgt, daß $|F(re^{i\theta}) - F(0)|$ die Maximalschwankung auf dem Kreise $|z| = r$, also a fortiori die Totalschwankung $T(r)$ nicht überschreiten kann.

Zweitens: *Die totalstetige Konvergenz von $F(re^{i\theta})$ gegen $F(e^{i\theta})$*, d. i. die Konvergenz gegen Null der Totalschwankung von $F(e^{i\theta}) - F(re^{i\theta})$ und daraus speziell *die Totalstetigkeit von $F(e^{i\theta})$*, d. h. die Tatsache, daß die Totalschwankung von $F(e^{i\theta})$ auf genügend kleinen Mengen beliebig klein, auf Nullmengen gleich Null ist. Diese Tatsache, verknüpft mit dem in § 3 angeführten Satze, nach welchem die Randwerte von $f(z)$ nur auf einer Nullmenge verschwinden, läßt sich, wie an anderer Stelle ausgeführt wurde[23]), folgendermaßen deuten: *Bei konformer Abbildung zweier endlichen Riemannschen Flächenstücke mit rektifizierbaren Rändern aufeinander ist das gegenseitige Entsprechen der Ränder eine totalstetige, d. h. den Nullmengen entsprechen Nullmengen.*

Szeged, den 5. November 1922.

[23]) Riesz l. c. [13]).

(Eingegangen am 18. November 1922.)

Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Das Gaußsche Fehlergesetz besitzt die Eigenschaft, daß es bei linearer Kombination der Fehler erhalten bleibt, sich reproduziert. Das Gaußsche Fehlergesetz kann durch diese Eigenschaft bis zu einem gewissen Grade charakterisiert werden: es ist das einzige Fehlergesetz, das linearen Fehlerkombinationen gegenüber Beharrlichkeit zeigt, wenn ein genügend starkes Verschwinden im Unendlichen gefordert wird. Ich habe hierauf schon vor einigen Jahren hingewiesen[1],[2]; ich habe, um zu dem ausgesprochenen Resultat zu gelangen, zwei verschiedene Wege benutzt und einen dritten, weiter führenden Weg angedeutet. Ich glaube heute, da das Interesse der Mathematiker diesen Fragen sich wieder mehr zuzuwenden scheint[3], meine Andeutungen weiter ausführen zu sollen[4]. Die Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes, die ich im folgenden gebe, scheint mir äußerst einfach und anschaulich zu sein; sie könnte m. E. mit Vorteil im Unterricht benutzt werden.

---

[1]) G. Pólya: Über das Gaußsche Fehlergesetz, Astron. Nachr. a) **208** (1919), S. 185–192, b) **209** (1919), S. 111–112.

[2]) Vgl. auch G. Förster: Das Fehlergesetz, Ztschr. f. Vermessungswesen **44** (1915), S. 65–72.

[3]) P. Lévy: Sur le rôle de la loi de Gauß dans la théorie des erreurs, Comptes Rendus **174** (1922), S. 855–857.

[4]) Das Folgende enthält, mit Ausnahme der Nummern 2 und 7, nur in meinen Arbeiten [1]) Ausgeführtes oder Angedeutetes. Die Nummern 1, 3, 6 sind meinen damaligen Ausführungen z. T. wörtlich entnommen, für die Funktionalgleichung (16) vgl. a. a. O. [1b]), S. 111 Formel (3), für die Methode unter 5 die Andeutung a. a. O. [1a]), S. 192. Die unter [6]) angeführten Arbeiten von Cauchy sind mir erst seither bekannt geworden. Die Formulierung der Nummern 2 und 7 des Textes ist durch die Arbeit von Herrn P. Lévy [3]) beeinflußt worden.

Die vorliegende Behandlung setzt die Kenntnis meiner oben zitierten Aufsätze nicht voraus.

1. Jede Funktion $\varphi(x)$, die den Bedingungen

$$\varphi(x) \geqq 0, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1 \tag{2}$$

genügt, soll als ein „Fehlergesetz" bezeichnet werden. Man kann sich vorstellen, daß die Funktion $\varphi(x)$ die Verteilung der Messungsfehler bei einer gewissen Art von Messungen beschreibt, indem die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler der Einzelmessung zwischen beliebige Grenzen x_1 und x_2 fällt, durch das Integral $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx$ angegeben wird.

Wenn $\varphi(x)$ ein Fehlergesetz ist, so ist es auch $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}$, falls $a > 0$; d. h. $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}$ erfüllt die Bedingungen (1), (2). Man kann sich vorstellen, daß $\varphi(x)$ und $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}$ die Fehlerverteilung bei zwei Messungen beschreiben, die von ähnlicher Natur, aber von verschiedener Präzision sind. Ich nenne die beiden Fehlergesetze $\varphi(x)$ und $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}$ einander *ähnlich*.

Wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Fehlergesetze sind, so ist auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,\psi(x-u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-v)\,\psi(v)\,dv \tag{3}$$

ein Fehlergesetz; die Konvergenz des Integrals sei vorausgesetzt. Die Funktion (3) erfüllt die Bedingungen (1), (2) (ihr Integral erstreckt von $-\infty$ bis $+\infty$ zerfällt in das Produkt von zwei Integralen, beide $= 1$ nach Voraussetzung). Die Bedeutung der Bildung (3) ist diese: wurde eine Größe A m-mal gemessen und eine Größe B n-mal, so kann man die $m+n$ Messungsergebnisse zu $m \cdot n$ angenäherten Bestimmungen der Größe $A+B$ kombinieren. Wenn die Fehler der einzelnen Bestimmungen von A $u_1, u_2, \ldots, u_m$ und die der Bestimmungen von B $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind, so sind die durch Kombination gewonnenen $m \cdot n$ Bestimmungen von $A+B$ mit den Fehlern $u_1+v_1, \ldots, u_1+v_n, \ldots, u_m+v_1, \ldots, u_m+v_n$ behaftet. Wenn die Verteilung der Fehler bei der Messung von A durch das Gesetz $\varphi(x)$ und bei der Messung von durch B durch $\psi(x)$ regiert wird, so wird sie bei der besprochenen mittelbaren Bestimmung von $A+B$ durch das Gesetz (3) beherrscht. Man kann sich wohl so ausdrücken, daß das Fehlergesetz (3) aus den Gesetzen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ durch *lineare Zusammensetzung der Fehler* entsteht.

Wenn zwei einander ähnliche Fehlergesetze $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}$ und $\varphi\left(\frac{x}{b}\right)\frac{1}{b}$ linear zusammengesetzt ein drittes, ihnen beiden ähnliches Fehlergesetz $\varphi\left(\frac{x}{c}\right)\frac{1}{c}$ erzeugen, so besteht die Gleichung

$$(4) \qquad \frac{1}{c}\varphi\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{ab}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{u}{a}\right)\varphi\left(\frac{x-u}{b}\right) du.$$

Es ist nicht ohne Bedeutung zu untersuchen, welche Funktionen $\varphi(x)$ die Gleichung (4) erfüllen können. Viele verschiedene physikalische, astronomische, geodätische Messungen, von den verschiedensten Präzisionsgraden, tragen in Hinsicht auf die Verteilung der Messungsfehler dasselbe charakteristische Gepräge. Dies macht verständlich die Bestrebungen, die schon auf Daniel Bernoulli zurückgehen, ein universell gültiges Fehlergesetz aufzufinden. Soll es ein Fehlergesetz $\varphi(x)$ von wahrhaft universellem Charakter geben, so muß es wohl bei *linearer Zusammensetzung der Fehler erhalten bleiben*, d. h. der Gleichung (4) genügen.

2. Eine vollständige Diskussion der Funktionalgleichung (4) steht nicht in meiner Absicht. Ich suche alle Systeme von drei Konstanten a, b, c und einer Funktion $\varphi(x)$ zu bestimmen, die die Gleichung (4) und folgende drei Bedingungen erfüllen:

I. $a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad \varphi(x) \geqq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx > 0.$

II. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx$ existiert.

III. $\varphi(x)$ ist in jedem endlichen Intervall beschränkt und im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel.

I und II sind schwerwiegende Voraussetzungen, die die Mannigfaltigkeit der Auflösungen wesentlich beengen, wie sich später herausstellen wird (vgl. unter 7). III ist hingegen eine unwesentliche Beschränkung, die nur zur Fernhaltung nebensächlicher Schwierigkeiten dient. Die Bedingungen I, d. h. die Positivität, vorauszusetzen, ist in unserem Falle selbstverständlich. Die Voraussetzung II fordert, daß unser Fehlergesetz endlichen mittleren quadratischen Fehler, kürzer gesagt, endliche Streuung besitzen soll. Vom praktischen Standpunkte aus wäre es unbedenklich, nicht bloß die Existenz von $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx$ vorauszusetzen, sondern auch die Existenz von $\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \varphi(x)\,dx$ für beliebig großes m (wie das in meiner früheren Mitteilung geschah l. c. [1a]), da man in der Praxis beliebig hohe

Momente zur feineren Untersuchung der Verteilung heranzuziehen sich für berechtigt hält.

Gesucht wird also das allgemeinste Fehlergesetz mit endlicher Streuung, das bei linearer Zusammensetzung der Fehler beharren kann. Genauer müßte man sagen: das *bei gewissen Konstellationen der Präzision* erhalten bleiben kann; denn es gibt Funktionen $\varphi(x)$, die der Gleichung (4) genügen, wenn a und b in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, und nicht genügen, wenn das Verhältnis von a zu b ein anderes ist. Diese Bemerkung unterscheidet meinen Standpunkt von dem der Herren G. Förster[2]) und P. Lévy[3]), die von der Funktion $\varphi(x)$ bedeutend mehr fordern, als hier gefordert wird, nämlich im wesentlichen das Bestehen von (4) für unbeschränkt variable positive Parameter a, b, von denen c eine Funktion sein soll.

Es wird sich herausstellen, daß *das Gaußsche Fehlergesetz die einzige Lösung der Funktionalgleichung* (4) *ist, die die Bedingungen* I, II, III *erfüllt, d. h. das einzige Fehlergesetz mit endlicher Streuung, das bei linearer Zusammensetzung der Fehler erhalten bleibt.*

3. Nach Voraussetzung II existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \varphi(x)\, dx = K_m \tag{5}$$

(das m-te Moment) für $m = 0, 1, 2$. Für dieselben Werte von m erhalten wir aus (4)

$$\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \varphi\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{1}{ab}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (u+x-u)^m \varphi\left(\frac{u}{a}\right)\varphi\left(\frac{x-u}{b}\right) du\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (u+v)^m \varphi\left(\frac{u}{a}\right)\varphi\left(\frac{v}{b}\right)\frac{du}{a}\frac{dv}{b}.$$

Hieraus folgen durch Zerlegen der Doppelintegrale in die Produkte einfacher mit Verwendung der Bezeichnung (5) für $m = 0, 1, 2$ die drei Gleichungen

$$K_0 = K_0^2, \tag{6}$$

$$c K_1 = a K_1 K_0 + b K_0 K_1, \tag{7}$$

$$c^2 K_2 = a^2 K_2 K_0 + 2ab K_1^2 + b^2 K_0 K_2. \tag{8}$$

Aus (6) folgt wegen Voraussetzung I

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = K_0 = 1. \tag{9}$$

D. h. jede positive Lösung von (4) muß ein Fehlergesetz sein. Die quadratische Form der Veränderlichen X, Y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (X + Yx)^2 \varphi(x)\,dx = X^2 K_0 - 2XYK_1 + Y^2 K_2$$

ist definit positiv (Voraussetzung I), daher ist

$$K_1^2 < K_0 K_2 = K_2,$$

vgl. (9), und so folgt aus (8), (9)

$$c^2 K_2 < a^2 K_2 + 2ab K_2 + b^2 K_2$$

$$c^2 < (a+b)^2 \tag{10}$$

($a > 0$, $b > 0$, $K_2 > 0$ nach Voraussetzung I). (9), (7) und (10) sind nur verträglich, wenn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = K_1 = 0. \tag{11}$$

D. h. ein Fehlergesetz, das (4) genügt und II erfüllt, enthält keinen konstanten Fehler. Hieraus folgt weiter nach (8) (9)

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{12}$$

Die Gleichungen (9), (11), (12) sind die Resultate dieser Diskussion. K_2 konnte (der Natur der Sache gemäß) nicht numerisch bestimmt werden, wie K_0, K_1. Nur $K_2 > 0$ steht fest. Ich verändere die Bezeichnung und setze

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx = \sigma^2, \tag{13}$$

wo $\sigma > 0$. σ ist die „Streuung".

4. Ich führe die Funktion

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\varphi(t)\,dt \tag{14}$$

ein (x reell). $\Phi(x)$ ist zweimal stetig differenzierbar kraft der Voraussetzung II. Es ist nämlich

$$\Phi'(x) = i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} t\varphi(t)\,dt, \qquad \Phi''(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} t^2 \varphi(t)\,dt.$$

Die Formeln (9), (11), (13) ergeben

$$\Phi(0) = 1, \qquad \Phi'(0) = 0, \qquad \Phi''(0) = -\sigma^2. \tag{15}$$

Aus der Funktionalgleichung (4) folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\,\varphi\left(\frac{t}{c}\right)\frac{dt}{c} = \frac{1}{ab}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(u+t-u)}\,\varphi\left(\frac{u}{a}\right)\varphi\left(\frac{t-u}{b}\right)du\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu}\,\varphi\left(\frac{u}{a}\right)\frac{du}{a}\,e^{ixv}\,\varphi\left(\frac{v}{b}\right)\frac{dv}{b},$$

d. h. eine Funktionalgleichung für $\Phi(x)$

$$\Phi(cx) = \Phi(ax)\,\Phi(bx). \tag{16}$$

5. Man setze

$$\frac{a}{c} = \alpha, \qquad \frac{b}{c} = \beta.$$

Dann ist gemäß (12)

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{17}$$

Die Gleichungen (4) (16) verwandeln sich bei ersichtlicher Variablenvertauschung in

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\varphi\left(\frac{x-u}{\beta}\right)du, \tag{4'}$$

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha x)\,\Phi(\beta x). \tag{16'}$$

Wir haben die Gleichung (4) durch lineare Zusammensetzung zweier ähnlicher Fehlergesetze erhalten (unter Nummer 1). Lesen wir jetzt die Gleichung (4′) in umgekehrter Richtung! (4′) bedeutet, daß der Fehler, dessen Gesetz $\varphi(x)$ ist, in zwei Partialfehler zerlegt werden kann, die beide dem Totalfehler ähnlich sind. Zerlegen wir diese Partialfehler weiter, jeden in zwei ihm ähnliche Partialfehler, und diese wieder! So wird der untersuchte Fehler vom Gesetze $\varphi(x)$ nacheinander in $2, 4, 8, 16, \ldots$ ihm ähnliche Partialfehler zerlegt.

Der Prozeß kann an Gleichung (16′) bequemer verfolgt werden, als an (4′). Man hat

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(\alpha x)\,\Phi(\beta x)\\ &= \Phi(\alpha^2 x)\,\Phi(\beta\alpha x)\,\Phi(\alpha\beta x)\,\Phi(\beta^2 x)\\ &= \Phi(\alpha^3 x)\,\Phi(\alpha^2\beta x)^3\,\Phi(\alpha\beta^2 x)^3\,\Phi(\beta^3 x)\end{aligned}$$

usw. Allgemein ist

$$\Phi(x) = \Phi(\gamma_{m1}x)\,\Phi(\gamma_{m2}x)\,\Phi(\gamma_{m3}x)\ldots\Phi(\gamma_{mm}x), \tag{18}$$

wo $m = 2^n$ und die m echten Brüche $\gamma_{m1}, \gamma_{m2}, \ldots, \gamma_{mm}$ mit den 2^n Gliedern übereinstimmen, die man bei Ausmultiplizieren des Produktes von n gleichen Faktoren

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\ldots(\alpha+\beta)$$

erhält. Insbesondere ist

$$\gamma_{m1}^2 + \gamma_{m2}^2 + \ldots + \gamma_{mm}^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^m = 1 \tag{19}$$

gemäß (17). Ferner, wenn $\alpha \geqq \beta$ vorausgesetzt wird, ist

$$\gamma_{m\mu} \leqq \alpha^n \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Bezeichnen wir das Maximum der Zahlen $\gamma_{m1}, \gamma_{m2}, \ldots, \gamma_{mm}$ mit Γ_m, so ist also

$$\lim_{m=\infty} \Gamma_m = 0. \tag{20}$$

$\Phi(x)$ ist stetig und $\Phi(0) = 1$. Daher kann man in einer gewissen Umgebung des Punktes $x = 0$

$$\lg \Phi(x) = u(x) + i\,v(x) \tag{21}$$

setzen, wo $v(0) = 0$, $u(x), v(x)$ stetig. Es folgt weiter aus (15) und aus der Stetigkeit von $\Phi'(x)$, $\Phi''(x)$, daß $u'(x), u''(x), v'(x), v''(x)$ in der betrachteten Umgebung auch stetig sind, und daß

$$u(0) = v(0) = u'(0) = v'(0) = 0, \tag{22}$$

$$u''(0) = -\sigma^2, \quad v''(0) = 0. \tag{23}$$

Betrachten wir einen beliebigen aber festen Wert x. Dann fällt $x\Gamma_m$ für genügend großes m in die Umgebung des Nullpunktes, worin (21) gültig ist, kraft (20). Für derartige m folgt aus (18), (21), (22)

$$\lg \Phi(x) = \sum_{\mu=1}^{m} (u(\gamma_{m\mu} x) + i\,v(\gamma_{m\mu} x)) \tag{24}$$

$$\frac{x^2}{2} \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_{m\mu}^2 \{u''(\Theta_m \gamma_{m\mu} x) + i\,v''(\Theta_m' \gamma_{m\mu} x)\},$$

wo $0 \leqq \Theta_m \leqq 1$, $0 \leqq \Theta_m' \leqq 1$. Die rechte Seite von (24) hat, wie die linke, unverändert denselben Wert bei wachsendem m. Wenn aber m unendlich wächst, so streben alle $2m$ Größen $\Theta_m \gamma_{m\mu} x$, $\Theta_m' \gamma_{m\mu} x$ gleichmäßig nach 0, kraft (20). Man erkennt aus der Stetigkeit von $u''(x)$, $v''(x)$ und aus (19), (23), daß der fragliche Wert

$$\lg \Phi(x) = \frac{x^2}{2}(u''(0) + i\,v''(0)) = -\frac{\sigma^2 x^2}{2}$$

ist. D. h. es ist für jeden reellen Wert von x (vgl. (14))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \varphi(t)\,dt = \Phi(x) = e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt - \frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt. \tag{25}$$

6. Es besteht somit identisch in x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\left(\varphi(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right) dt = 0.$$

Hieraus folgt kraft Voraussetzungen II, III auf Grund allgemeiner Überlegungen (vgl. unter Nr. 8), daß in jedem *Stetigkeitspunkt x von $\varphi(x)$*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{26}$$

ist. Ich will daraus weiter folgern, mit Hilfe der Funktionalgleichung (4), daß (26) in *jedem* Punkt x ohne Ausnahme gültig ist.

Die Stetigkeitspunkte einer im Riemannschen Sinne integrablen Funktion liegen überall dicht.

Wenn zwei in Riemannschem Sinne integrable Funktionen in jedem Stetigkeitspunkt übereinstimmen, so stimmt das Integral ihrer Quadrate (z. B.) über jedes Intervall überein. Die Gleichung (26) ist schon in solchem Umfang nachgewiesen, daß die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)^2 dx \tag{27}$$

gesichert ist. Ich behaupte: *jede* Auflösung $\varphi(x)$ der Funktionalgleichung (4), für welche (27) existiert, ist stetig. (Hierin ist das ausnahmslose Bestehen von (26) enthalten.) Es ist nämlich

$$\left(\int_A^\infty \varphi\left(\frac{u}{a}\right)\varphi\left(\frac{x+h-u}{b}\right) du\right)^2 < \int_A^\infty \varphi\left(\frac{u}{a}\right)^2 du \int_A^\infty \varphi\left(\frac{x+h-u}{b}\right)^2 du \tag{28}$$

$$= ab \int_{A/a}^{+\infty} \varphi(t)^2 dt \int_{-\infty}^{x+h-A/b} \varphi(t)^2 dt.$$

Die rechte Seite von (28) wird, unabhängig von x und h, bloß durch die Wahl von einem genügend großen A beliebig klein. So kann man die Untersuchung der Differenz $\varphi\left(\frac{x+h}{c}\right) - \varphi\left(\frac{x}{c}\right)$ gemäß (4) auf die des Integrals

$$\int_{-A}^{+A} \varphi\left(\frac{u}{a}\right)\left\{\varphi\left(\frac{x+h-u}{b}\right) - \varphi\left(\frac{x-u}{b}\right)\right\} du$$

zurückführen. Daß aber dies Integral durch geeignete Wahl von h beliebig klein wird, ist eine Folge der Riemannschen Integrabilitätsbedingung, wie man leicht sieht, wenn man das Intervall $-A$, $+A$ in Teile von der Länge h teilt.

7. Die Funktionalgleichung (4) hat unendlich viele Auflösungen außer dem Gaußschen Fehlergesetz. Bewiesen wurde doch nur dies: keine Auflösung kann gleichzeitig beiden Bedingungen I und II (ausgesprochen unter 2) genügen, außer dem Gaußschen Fehlergesetz.

Es gibt positive, von dem Gaußschen Fehlergesetz verschiedene Lösungen von (4); sie können natürlich keine endliche Streuung, d. h. kein konvergentes quadratisches Moment $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\, dx$ besitzen.

Es sei $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, die positive Zahl N so beschaffen, daß

$$\alpha^N + \beta^N = 1 \tag{29}$$

und die Logarithmen von α und β seien kommensurabel, d. h.

$$-\lg \alpha = \omega m, \qquad -\lg \beta = \omega n, \tag{30}$$

wo m, n rationale ganze Zahlen. Bedeutet $\psi(x)$ irgendeine periodische Funktion mit der Periode ω, $\psi(x+\omega) = \psi(x)$, so ist

$$\Phi(x) = e^{-|x|^N \psi(\lg|x|)}, \tag{31}$$

wie das Einsetzen zeigt, eine Lösung von (16′), und folglich, wenn das Integral konvergiert,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\, e^{-ixt}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(t) \cos x t\, dt \tag{32}$$

eine Lösung von (4′). Zum Beweis löse man (14) in bezug auf $\varphi(x)$ nach dem Fourierschen Integralsatz auf.

Insbesondere sei N, ω, $\psi(x)$ gegeben, es sei $0 < N < 1$, und $\psi'(x)$, $\psi''(x)$ sollen existieren und stetig sein. Dann kann man die positive Zahl ε stets so klein wählen, daß die Funktion

$$\Phi(x) = e^{-|x|^N (1+\varepsilon \psi(\lg|x|))}, \tag{33}$$

die, wie (31), eine Auflösung von (16′) ergibt, die Eigenschaften

$$\Phi(x) > 0, \qquad \Phi'(x) < 0, \qquad \Phi''(x) > 0 \tag{34}$$

für $x > 0$ besitzt (leicht zu sehen) und (32) konvergiert. Sind aber die Eigenschaften (34) vorhanden, so stellt das Integral rechts in (32) eine positive Funktion dar[5]).

Es gibt von dem Gaußschen Fehlergesetz verschiedene Lösungen von (4) *mit konvergentem* $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\, dx$. Schon Cauchy[6]) hat im Zu-

[5]) Vgl. G. Pólya: Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen, Math. Zeitschrift 2 (1918), S. 352—383, vgl. S. 378, VII.

[6]) Vgl. Comptes Rendus 37 (1853), S. 202—206 und passim.

sammenhang mit der Fehlertheorie die in den Formeln (31), (32) als Spezialfall enthaltene Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t^N}\cos x\,t\,dt \tag{35}$$

betrachtet. Für $N = 2$ stellt (35) das Gaußsche Fehlergesetz dar, vgl. (25), für $N \gtrless 2$ eine davon verschiedene Lösung der Funktionalgleichung (4).

Nun kann man, etwa durch Umformung mittels partieller Integration, leicht feststellen, daß $\varphi(x)x^{N+1}$ beschränkt bleibt, wenn $\varphi(x)$ durch (35) definiert ist. Ist also $N > 2$, so konvergiert (13) und folglich nimmt $\varphi(x)$ auch negative Werte an[7]), welcher Umstand von Cauchy[6]) nicht berücksichtigt wurde.

Die Funktion (35) hat übrigens die in anderer Terminologie schon von Cauchy erkannte Eigenschaft, daß sie die Funktionalgleichung (4) für *beliebige* positive a, b, c erfüllt, zwischen denen die Relation

$$a^N + b^N = c^N$$

besteht; vgl. a. a. O.[6]) z. B. S. 272, Formeln (11), (12), (13). P. Lévy[3]) hat gefunden, daß die Funktion (35) für $N \leqq 2$ stets positiv ist; wenn das Bestehen von (4) in einem weiteren Umfange, d. h. für alle positive Werte a, b, c, zwischen denen nur eine Relation besteht, gefordert wird, so stellt nach Lévy (35), $0 < N \leqq 2$ genommen, die allgemeinste positive Lösung dar. Das eben besprochene Beispiel (33) zeigt, daß die hier behandelte Aufgabe (a, b, c konstant) von der von P. Lévy behandelten (a, b, c variable Parameter) sich wesentlich unterscheidet.

8. Der Nachweis der Formel (26), ausgehend von (25), kann auf folgenden Hilfssatz gestützt werden:

Wenn (I) *das Integral* $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ *konvergiert und*

(II) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,dt = 0$ *identisch in* x *gilt,*

so ist $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = 0$ *für beliebige* α, β.

Da dieser Hilfssatz, trotz seiner Einfachheit, in der Literatur nirgendwo explizite hervorgehoben zu sein scheint, führe ich den Beweis aus. Es sei l so gewählt, daß

$$\alpha < \beta < \alpha + l.$$

[7]) Vgl. F. Bernstein: Über das Fourierintegral usw., Math. Ann. 79 (1919), S. 265—268.

Ich definiere eine periodische Funktion $\psi(t)$ folgendermaßen:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha < t < \beta, \\ 0 & \text{für } \beta < t < \alpha + l, \end{cases}$$

$$\psi(t+l) + \psi(t),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} (\psi(t+\varepsilon) + \psi(t-\varepsilon)) = 2\psi(t).$$

Man entwickle $\psi(t)$ in eine Fourierreihe nach $\cos\frac{2\pi t}{l}, \sin\frac{2\pi t}{l}, \ldots,$ $\cos\frac{2\pi n t}{l}, \sin\frac{2\pi n t}{l}, \ldots$. Man bezeichne mit $\psi_n(t)$ das arithmetische Mittel der ersten n Partialsummen der Fourierreihe von $\psi(t)$. Gemäß Voraussetzung (II) ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\psi_n(t)\,dt = 0.$$

Nach Fejér ist

$$0 < \psi_n(t) < 1.$$

Hieraus folgt, gemäß Voraussetzung (I),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\psi(t)\,dt = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\psi_n(t)\,dt = 0,$$

welche Gleichung sich so schreiben läßt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt + \int_{\alpha+l}^{\beta+l} f(t)\,dt + \int_{\alpha+2l}^{\beta+2l} f(t)\,dt + \ldots + \int_{\alpha-l}^{\beta-l} f(t)\,dt + \int_{\alpha-2l}^{\beta-2l} f(t)\,dt + \ldots = 0.$$

Hieraus folgt für $\lim l = \infty$, unter nochmaliger Heranziehung der Voraussetzung (I),

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = 0,$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 9. August 1922.)

Anhang.

Eine für alle reellen Werte von x definierte reelle Funktion $f(x)$, die nie abnimmt und die Eigenschaften

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x=+\infty} f(x) = 1$$

besitzt, heißt eine Verteilungsfunktion. Ich habe vor einiger Zeit[8]) darauf

[8]) Pólya, G.: Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentproblem, Math. Ztschr. 8 (1920), S. 171–181, Satz III.

hingewiesen, daß die Konvergenzbetrachtungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Vorteil auf folgenden Satz gegründet werden können:

A. *Die Funktionen* $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ *seien Verteilungsfunktionen und es existiere eine positive Größe* a *derart, daß die uneigentlichen Stieltjesschen Integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}\, df_n(t) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

für $-a \leqq x \leqq a$ *sämtlich konvergieren. Es sei für dieselben Werte von* x

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}\, df_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}\, df(t),$$

wo $f(t)$ *eine stetige Verteilungsfunktion bedeutet. Dann gilt gleichmäßig für alle Werte von* x

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x).$$

In einem Nachtrag[9]) zu seiner unter [3]) zitierten Note verwendet Herr P. Lévy an Stelle des Satzes A den folgenden:

B. *Die Funktionen* $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ *seien Verteilungsfunktionen und es sei gleichmäßig in bezug auf die reelle Variable* x *in jedem endlichen Intervalle*

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, df_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, df(t),$$

wo $f(t)$ *eine Verteilungsfunktion bedeutet. Dann gilt an jeder Stetigkeitsstelle* x *von* $f(x)$

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x).$$

Es sei hier ein Beweis für den Satz B mitgeteilt, der dem Beweis des Hilfssatzes unter 8 sehr nahe verwandt ist. Man beweist leicht die Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \eta x \cdot \sin (h+\eta) x \cdot e^{ixy}}{\pi \eta x^2}\, dx = D(y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq y \leqq h, \\ 1 - \dfrac{y-h}{2\eta} & \text{für} \quad h \leqq y \leqq h + 2\eta, \\ 0 & \text{für} \quad y \geqq h + 2\eta, \end{cases}$$

$$D(-y) = D(y), \qquad (h > 0,\ \eta > 0).$$

Es sei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, df_n(t) = \Phi_n(x), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, df(t) = \Phi(x)$$

[9]) Lévy, P.: Sur la détermination des lois de probabilités par leurs fonctions caractéristiques, C. R. **175** (1922, 2), S. 854–856 (13. Nov.).

gesetzt. Die Funktionen $\Phi_n(x)$, $\Phi(x)$ sind stetig. Aus $|\Phi_n(x)| \leqq 1$, $\Phi(x)| \leqq 1$ und der Voraussetzung des Satzes B folgt für reelles s, $\eta > 0$, $h > 0$

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \eta x \cdot \sin (h - \eta) x \cdot e^{-isx}}{\pi \eta x^2} \Phi_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \eta x \cdot \sin (h + \eta) x \cdot e^{-isx}}{\pi \eta x^2} \Phi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \eta x \cdot \sin (h + \eta) x \cdot e^{ix(t-s)}}{\pi \eta x^2}\, dx \cdot df(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(t - s)\, df(t)$$

wegen der absoluten Konvergenz der auftretenden Integrale; d. h. es gilt

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D(t - s)\, df_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(t - s)\, df(t).$$

Mit Rücksicht auf den „dachförmigen" Wertverlauf von $D(t - s)$ ergibt dies

$$\lim_{n=\infty} (f_n(s + h + 2\eta - 0) - f_n(s - h - 2\eta + 0)) \geqq f(s + h - 0) - f(s - h - 0),$$

$$\lim_{n=\infty} (f_n(s + h + 0) - f_n(s - h - 0)) \leqq f(s + h - 2\eta - 0) - f(s - h - 2\eta + 0)$$

für $s \gtrless 0$, $h > 0$, $\eta > 0$, s, h, η beliebig. Hieraus folgert man für zwei beliebige Stetigkeitsstellen x_1, x_2 von $f(x)$

$$\lim_{n=\infty} (f_n(x_1) - f_n(x_2)) = f(x_1) - f(x_2),$$

woraus, da es sich um Verteilungsfunktionen handelt, Satz B folgt.

(Eingegangen am 27. November 1922.)

Über dyadische Brüche.

Von

A. Khintchine in Iwanowo-Wosniesensk (Rußland).

Es sei x eine Irrationalzahl, $0 < x < 1$. In der Entwicklung von x in einen dyadischen Bruch nehme man die n ersten Ziffern und zähle, wie oft dabei die Null auftritt. Den Überschuß dieser Anzahl (algebraisch gerechnet) über $\frac{n}{2}$ bezeichne man mit $\mu_n(x)$. Über die Größenordnung von $\mu_n(x)$ in bezug auf n läßt sich im allgemeinen nichts Interessantes aussagen. Wenn man jedoch eine Menge der x-Werte vom Maße Null zu vernachlässigen bereit ist, kommen einfache und wichtige Gesetze zur Geltung. Herr Borel hat als erster das Problem in Angriff genommen und die Relation

$$\mu_n(x) = o(n)$$

für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null bewiesen. Der Satz besagt offenbar, daß die Anzahlen der Nullen und Einsen unter den n ersten Ziffern der Entwicklung von x in einem dyadischen Bruch einander asymptotisch gleich sind, wenn x nicht einer gewissen Menge vom Maße Null angehört. Ferner hat Herr Hausdorff[1]) die schärfere Relation

$$\mu_n(x) = o(n^\alpha)$$

für jedes $\alpha > \frac{1}{2}$ und ebenfalls für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null erhalten. Endlich gehört das schärfste über unsere Fragestellung veröffentlichte Resultat meines Wissens[2]) den Herren Hardy und Littlewood[3]), die einerseits für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null die Relation

$$\mu_n(x) = O(\sqrt{n \lg n})$$

[1]) In seinem bekannten Werke „Grundzüge der Mengenlehre", 1914, S. 421.

[2]) Ich muß leider hervorheben, daß uns in Rußland bis jetzt selbst von den wichtigsten Zeitschriften der Inhalt noch nicht systematisch und zur rechten Zeit bekannt wird.

[3]) „Some problems of Diophantine approximation", Acta Mathematica 37 (1914), S. 185 und 187.

und noch präziser

$$\limsup \frac{|\mu_n(x)|}{\sqrt{n \lg n}} \leqq \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

bewiesen, andererseits aber unter denselben Bedingungen die Ungültigkeit der Relation

$$\mu_n(x) = O(\sqrt{n}) \tag{2}$$

festgestellt haben.

Zwischen (1) und (2) bleibt eine Lücke, die ich hier verkleinern will, indem ich statt (1) die schärfere Relation

$$\limsup \frac{|\mu_n(x)|}{\sqrt{n \lg \lg n}} \leqq 1 \tag{3}$$

für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null beweisen werde. Ich bediene mich hierzu einer Methode, die von der Hardy-Littlewoodschen verschieden ist und in einigen Punkten der Methode der Herren Weyl und Hobson für die Behandlung von Konvergenzfragen bei Reihen von Orthogonalfunktionen sehr ähnlich ist. Für den Leser ist die Bekanntschaft mit den früheren diesbezüglichen Arbeiten nicht notwendig.

§ 1.

Ich bezeichne mit $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ die Funktion, welche in jedem Intervall $\left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right]$ konstant und zwar gleich -1 oder $+1$ ist, je nachdem die ganze Zahl k, $0 \leqq k < 2^i$, gerade oder ungerade ist. In den Endpunkten der Intervalle $\left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right]$ $(0 \leqq k < 2^i)$ setze man der Bestimmtheit wegen $a_i(x) = 0$. Diese Funktionen $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ besitzen dann folgende leicht verifizierbare Eigenschaften:

1. Man entwickle die Irrationalzahl x in einen dyadischen Bruch; dann ist die i-te Ziffer der Entwicklung gleich Null oder Eins, je nachdem $a_i(x) = -1$ oder $+1$ ist. Wenn man daher

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)$$

setzt, ist offenbar

$$|\mu_n(x)| = \frac{1}{2}|\varphi_n(x)|. \tag{4}$$

2. Das Integral

$$\int_0^1 [a_{i_1}(x)]^{\alpha_1} [a_{i_2}(x)]^{\alpha_2} \ldots [a_{i_m}(x)]^{\alpha_m} dx$$

ist gleich 0 oder 1, je nachdem wenigstens eine der ganzen nicht negativen

Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ungerade ist oder alle diese Zahlen gerade sind; dabei sind die Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_m$ paarweise verschieden gedacht. Insbesondere bilden also die Funktionen $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ein orthogonales Funktionensystem.

Bevor ich zum Beweise der Relation (3) übergehe, will ich einige Hilfssätze entwickeln, damit später der Beweis ununterbrochen vollbracht werden kann.

Hilfssatz I. *Es sei $n > 0$ eine feste ganze Zahl: $q > 0$, $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0, \ldots, c_q \geqq 0$ seien beliebige ganze Zahlen, die der Bedingung*

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_q = n \tag{5}$$

genügen. Dann ist

$$\frac{c_1!\, c_2! \ldots c_q!}{(2c_1)!\,(2c_2)! \ldots (2c_q)!} \leqq \frac{1}{2^n}. \tag{6}$$

Beweis. Falls n von den Zahlen c_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ gleich 1, die übrigen gleich 0 sind, ist die linke Seite von (6) offenbar gleich $\frac{1}{2^n}$. Anderenfalls muß ein $c_i > 1$ sein; es sei z. B. $c_q > 1$. Wir ersetzen dann c_q durch $c_q - 1$, und führen noch $c_{q+1} = 1$ ein, wodurch die Anzahl q um eine Einheit vergrößert wird, die Bedingung (5) aber erfüllt bleibt. Für den neuen Zahlenkomplex c_i wird aber die linke Seite von (6) größer; man verifiziert nämlich unmittelbar, daß im Falle $c_q > 1$

$$\frac{c_q!}{(2c_q)!} < \frac{(c_q - 1)!\, 1!}{[2(c_q - 1)]!\, 2!}$$

ist. Sollte im neuen Zahlenkomplex noch eine Zahl > 1 vorhanden sein, so wenden wir denselben Prozeß nochmals an usw., bis wir zu einem Zahlenkomplex von lauter Nullen und Einsen gelangen, der immer noch der Bedingung (5) Genüge leistet, und für den (6) mit dem Gleichheitszeichen gilt. Da jeder Schritt in dem vorgenommenen Prozeß die linke Seite von (6) vergrößert hat, ist Hilfssatz I bewiesen.

Hilfssatz II. *Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ reelle Konstanten, die nicht gleichzeitig verschwinden. $E(\delta)$ bedeute die Menge der zwischen 0 und 1 gelegenen Zahlen x, für welche*

$$|\gamma_1 a_1(x) + \gamma_2 a_2(x) + \ldots + \gamma_n a_n(x)| > \delta > 0$$

ist. Dann ist[4])

$$\mathfrak{m}\, E(\delta) < C e^{-\frac{\delta^2}{2\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2}},$$

wo C (wie auch später $C_1, C_2, \ldots$) absolut konstant ist.

[4]) $\mathfrak{m}\, M$ bedeutet das Lebesguesche Maß der Menge M.

Beweis. Es sei

$$m = \left[\frac{\delta^2}{2\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2}\right].$$

Dann ist, wie aus der Eigenschaft 2. der Funktionen $a_i(x)$ folgt,

$$\delta^{2m}\,\mathfrak{m}\,E(\delta) \leqq \int_0^1 [\gamma_1 a_1(x) + \gamma_2 a_2(x) + \ldots + \gamma_n a_n(x)]^{2m}\,dx$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=m \\ \alpha_i \geqq 0\,(i=1,2,\ldots,n)}} \frac{(2m)!}{(2\alpha_1)!\,(2\alpha_2)!\ldots(2\alpha_n)!}\,\gamma_1^{2\alpha_1}\gamma_2^{2\alpha_2}\ldots\gamma_n^{2\alpha_n}.$$

Nun ist nach Hilfssatz I für $m > 0$ und $\alpha_1 \geqq 0,\ \alpha_2 \geqq 0,\ \ldots,\ \alpha_n \geqq 0,$ $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = m$

$$\frac{1}{(2\alpha_1)!\,(2\alpha_2)!\ldots(2\alpha_n)!} \leqq \frac{1}{2^m\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!};$$

und diese Relation bleibt offenbar auch im Falle $m = 0$ bestehen. Folglich ist

$$\delta^{2m}\,\mathfrak{m}\,E(\delta) \leqq \frac{(2m)!}{2^m\cdot m!} \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=m \\ \alpha_i \geqq 0\,(i=1,2,\ldots,n)}} \frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}\,\gamma_1^{2\alpha_1}\gamma_2^{2\alpha_2}\ldots\gamma_n^{2\alpha_n}$$

$$= \frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}\left[\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2\right]^m.$$

Nun ist, wenn im Falle $m = 0$ gesetzt wird $m^m = 1$,

$$(2m)! < C_1\,2^{2m}\,m^{2m}\,e^{-2m}\sqrt{m}, \qquad m! > C_2\,m^m\,e^{-m}\sqrt{m},$$

also

$$\frac{(2m)!}{2^m\cdot m!} < C_3\left(\frac{2}{e}\right)^m m^m,$$

und folglich

$$\mathfrak{m}\,E(\delta) < C_3\left[\frac{2m\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2}{e\,\delta^2}\right]^m \leqq C_3\,e^{-m} < C_3\,e^{1-\frac{\delta^2}{2\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2}} = Ce^{-\frac{\delta^2}{2\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2}},$$

wo $C = C_3 e$ gesetzt ist. Damit ist Hilfssatz II bewiesen.

Wir bezeichnen nun im folgenden mit $E_n(\delta)$ die Menge der Zahlen x, für welche

$$\left|\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n\,\psi(n)}}\right| > \delta$$

ausfällt. Dabei sei $\psi(x)$ irgendeine überall stetige und differentiierbare positive Funktion von x, die für $x > 0$ der Bedingung $0 < \psi'(x) < \frac{\psi(x)}{x}$ genügt.

Hilfssatz III. *Es ist*

$$\mathfrak{m} E_n(\delta) < C e^{-\frac{\delta^2}{2}\psi(n)}.$$

Beweis. Man wende Hilfssatz II mit $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{n\psi(n)}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ an. $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2$ ist in diesem Falle gleich $\frac{1}{\psi(n)}$, womit Hilfssatz III bewiesen ist[5]).

Es sei ferner $E_{p,q}(\delta)$ die Menge der Zahlen x, für welche

$$\left| \frac{\varphi_q(x)}{\sqrt{q\psi(q)}} - \frac{\varphi_p(x)}{\sqrt{p\psi(p)}} \right| > \delta$$

ist.

Hilfssatz IV. *Es ist für* $0 < p < q < 2p$

$$\mathfrak{m} E_{p,q}(\delta) < C e^{-\frac{\delta^2}{4}\frac{p\psi(p)}{q-p}}.$$

Beweis. Es ist offenbar

$$\frac{\varphi_q(x)}{\sqrt{q\psi(q)}} - \frac{\varphi_p(x)}{\sqrt{p\psi(p)}} = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i a_i(x),$$

wenn

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{q\psi(q)}} - \frac{1}{\sqrt{p\psi(p)}} = u_{p,q} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

und

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{q\psi(q)}} \quad \text{für} \quad i = p+1, p+2, \ldots, q$$

gesetzt wird, also

$$\sum_{i=1}^{q} \gamma_i^2 = p\,(u_{p,q})^2 + \frac{q-p}{q\psi(q)}.$$

Nun ist

$$|u_{p,q}| = \frac{1}{\sqrt{p\psi(p)}} - \frac{1}{\sqrt{q\psi(q)}} < (q-p) \operatorname*{Max}_{p \leqq x \leqq q} \left| \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x\psi(x)}}\right) \right|.$$

Es ist aber für $p \leqq x \leqq q$

$$\left| \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x\psi(x)}}\right) \right| = \left| \frac{x\psi'(x) + \psi(x)}{2\sqrt{x^3[\psi(x)]^3}} \right| < \frac{1}{\sqrt{x^3\psi(x)}} \leqq \frac{1}{\sqrt{p^3\psi(p)}},$$

also

$$(u_{p,q})^2 < \frac{(q-p)^2}{p^3\psi(p)}.$$

Folglich ist

$$\sum_{i=1}^{q} \gamma_i^2 < \frac{(q-p)^2}{p^2\psi(p)} + \frac{q-p}{q\psi(q)} < \frac{q-p}{p\psi(p)} + \frac{q-p}{p\psi(p)} = \frac{2(q-p)}{p\psi(p)}.$$

---

[5]) Für $\psi(n) = \lg n$ folgt daraus sofort das Ergebnis (1) von Hardy und Littlewood.

Die Anwendung von Hilfssatz II ergibt daher

$$\mathfrak{m} E_{p,q}(\delta) < C e^{-\frac{\delta^2}{4} \frac{p \psi(p)}{q-p}},$$

was zu beweisen war.

Nun sei $e_{p,r}(\delta)$ die Menge der Zahlen x, für welche wenigstens eine der Größen

$$\left| \frac{\varphi_q(x)}{\sqrt{q \psi(q)}} - \frac{\varphi_p(x)}{\sqrt{p \psi(p)}} \right| \qquad (q = p+1, p+2, \ldots, p+r)$$

größer als δ ausfällt.

Hilfssatz V. *Es ist für* $0 < p < p+r < 2p$

$$\mathfrak{m} e_{p,r}(\delta) < C p e^{-\frac{\delta^2}{4} \frac{p \psi(p)}{r}}.$$

Beweis. Folgt einfach daraus, daß

$$e_{p,r}(\delta) = \sum_{q=p+1}^{p+r} E_{p,q}(\delta)$$

und folglich

$$\mathfrak{m} e_{p,r}(\delta) \leqq \sum_{q=p+1}^{p+r} \mathfrak{m} E_{p,q}(\delta)$$

ist, wo die Anzahl r der Summanden kleiner als p und der einzelne Summand $\mathfrak{m} E_{p,q}(\delta)$ nach Hilfssatz IV kleiner als

$$C e^{-\frac{\delta^2}{4} \frac{p \psi(p)}{q-p}} \leqq C e^{-\frac{\delta^2}{4} \frac{p \psi(p)}{r}}$$

ist.

§ 2.

Hauptsatz. *Für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null ist*

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{\mu_n(x)}{\sqrt{n \lg \lg n}} \right| \leqq 1. \tag{7}$$

Beweis. Wegen (4) ist (7) mit der Relation

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n \lg \lg n}} \right| \leqq 2 \tag{8}$$

äquivalent, die wir jetzt in Angriff nehmen wollen.

Man setze für ganzes $m > 0$ und ganzes k, $0 \leqq k < m$,

$$T_{m,k} = \left[2^m + \frac{k}{m} 2^m \right] + 1.$$

Dann ergibt erstens Hilfssatz III, wenn $\psi(n) = \lg\lg n$ und $\delta = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, gesetzt und $T_{m,k}$ statt n geschrieben wird,

$$\mathfrak{m} E_{T_{m,k}}(\delta) < C e^{-\frac{(2+\varepsilon)^2}{2} \lg\lg\left\{2^m + \frac{k}{m} 2^m\right\}}$$
$$< C e^{-(2+\varepsilon)[\lg m + \lg\lg 2]} = K(\varepsilon) \cdot m^{-2-\varepsilon},$$

wo $K(\varepsilon)$ nur von ε abhängt. Es ist nun leicht zu sehen, daß die Reihe

$$\sum_{m,k} \mathfrak{m} E_{T_{m,k}}(\delta),$$

über $0 \leqq k < m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ erstreckt, konvergiert. Denn es ist für festes m

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathfrak{m} E_{T_{m,k}} < m \cdot K(\varepsilon) \cdot m^{-2-\varepsilon} = K(\varepsilon)\, m^{-1-\varepsilon}.$$

Man schließt daraus in bekannter Weise, daß für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null

$$\limsup_{\substack{m \to \infty \\ 0 \leqq k < m}} \left| \frac{\varphi_{T_{m,k}}(x)}{\sqrt{T_{m,k} \lg\lg T_{m,k}}} \right| \leqq \delta = 2 + \varepsilon$$

ist. Da hier $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen werden kann, so folgt, daß für alle x mit Ausschluß einer Menge vom Maße Null die Relation

$$\limsup_{\substack{m \to \infty \\ 0 \leqq k < m}} \left| \frac{\varphi_{T_{m,k}}(x)}{\sqrt{T_{m,k} \lg\lg T_{m,k}}} \right| \leqq 2$$

gilt.

Zweitens wende man Hilfssatz V an, indem man jetzt wieder $\psi(n) = \lg\lg n$, indessen $\delta > 0$ beliebig klein annimmt und $p = T_{m,k}$, $r = T_{m,k+1} - T_{m,k} < \frac{2^m}{m} + 1 < \frac{2^{m+1}}{m}$ setzt. Man erhält so, indem man noch der kürzeren Schreibweise halber

$$M_{m,k}(\delta) = e_{T_{m,k},\, T_{m,k+1} - T_{m,k}}(\delta)$$

setzt,

$$\mathfrak{m} M_{m,k}(\delta) < C T_{m,k} e^{-\frac{\delta^2}{4} \frac{T_{m,k}(\lg m + \lg\lg 2)}{T_{m,k+1} - T_{m,k}}}$$
$$< C' 2^m \cdot e^{-\frac{\delta^2}{4} \frac{m \cdot 2^m (\lg m + \lg\lg 2)}{2^{m+1}}}$$
$$< C' 2^m e^{-L(\delta) m (\lg m + \lg\lg 2)},$$

wo C' absolut konstant ist und $L(\delta) > 0$ nur von δ abhängt. Für genügend großes m folgt somit

$$\mathfrak{m} M_{m\ k}(\delta) < C' e^{-m\{L(\delta)[\lg m + \lg\lg 2] - \lg 2\}} < C' e^{-m}.$$

Man sieht nun wieder leicht ein, daß die Reihe

$$\sum_{\substack{m=1 \\ 0 \leqq k < m}}^{\infty} \mathfrak{m}\, M_{k,m}$$

konvergiert. Denn es ist für festes m

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathfrak{m}\, M_{k,m} < C' m e^{-m}.$$

Man schließt daraus in bekannter Weise, daß die Menge der Zahlen x, welche einer unendlichen Anzahl der Mengen $M_{k,m}$ angehören, das Maß Null hat.

Damit sind wir zu folgendem Resultate gekommen: Für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null gilt erstens die Relation (9) und zweitens, wie klein auch δ sei, für jedes ganze $n \geqq n_0 = n_0(x, \delta)$, wenn m und k durch

$$T_{m,k} \leqq n < T_{m,k+1}$$

definiert werden, die Relation

$$\left| \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n \lg \lg n}} - \frac{\varphi_{T_{m,k}}(x)}{\sqrt{T_{m,k} \lg \lg T_{m,k}}} \right| \leqq \delta.$$

Daraus folgt offenbar, daß für ein solches x

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n \lg \lg n}} \right| \leqq 2 + \delta$$

ist. Und da schließlich $\delta > 0$ beliebig klein angenommen werden kann, so ist für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null (8), also die äquivalente Relation (7), und damit unser Satz bewiesen.

Iwanowo-Wosniesensk, 6. Nov. 1922.

(Eingegangen am 12. Dezember 1922.)

Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel.

Von

Friedrich Riesz in Szeged.

Auf der Suche nach einer einfachen Verallgemeinerung der sogenannten Parsevalschen und Riesz-Fischerschen Sätze fand Herr W. H. Young im Jahre 1912 folgende Sätze[1]:

A. *Ist für die trigonometrische Reihe*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

und für eine positive ungerade ganze Zahl p die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^{1+\frac{1}{p}} + |b_n|^{1+\frac{1}{p}}\right)$$

konvergent, so ist (1) *die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$, deren $(1+p)$-te Potenz integrierbar*[2] *ist.*

B. *Ist* (1) *die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ und ist für eine positive ungerade ganze Zahl p die Funktion $|f(x)|^{1+\frac{1}{p}}$ integrierbar, so ist die Summe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{1+p} + b_n^{1+p})$$

konvergent.

Vor kurzem ist es Herrn F. Hausdorff gelungen, die in bezug auf p gemachte Einschränkung aufzuheben und die entsprechenden Sätze für

[1]) Young, W. H.: Sur la généralisation du Théorème de Parseval, Comptes rendus, Paris, **155** (1912), S. 30—33; On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants, Proc. London Math. Soc., 2. ser., **12** (1912), S. 71—88.

[2]) Die Begriffe „Integral" und „integrierbar" sind hier und in der Folge im Lebesgueschen Sinne zu deuten.

den Fall einer beliebigen, auch nicht notwendig ganzen Zahl $p > 1$ zu beweisen. Zugleich hat er die beiden Sätze auch nach anderer Richtung hin verschärft, indem er dieselben als Korollare gewisser Ungleichungen hinstellte, die als Verallgemeinerung der Besselschen Ungleichung resp. der Parsevalschen Formel anzusehen sind. Herr Hausdorff hat über seine Resultate im September d. J. der Naturforscherversammlung in Leipzig berichtet; bezüglich des Beweises verwies er auf seine in dieser Zeitschrift demnächst erscheinende Arbeit. Durch diese Mitteilung angeregt, suchte ich mir einen Beweis auszuarbeiten; dabei fand ich, daß jene Resultate nicht nur für das trigonometrische Orthogonalsystem, sondern auch für jedes beschränkte Orthogonalsystem gelten.

Mein Beweis läuft teilweise, wie ich aus einer brieflichen Mitteilung des Herrn Hausdorff erfahre, dem seinigen ziemlich parallel; der wesentliche Unterschied, der mir den allgemeineren Schluß gestattet, besteht in folgendem: Hausdorff führt den Fall eines beliebigen dyadisch rationalen $p = \frac{r}{2^s} > 1$ (aus welchem ja die entsprechenden Ungleichungen für beliebige $p > 1$ durch Einschachtelung unmittelbar folgen) in einer *endlichen* Anzahl von Schritten auf den Youngschen Fall zurück, während ich (für beliebige $p > 1$) denselben Prozeß *unendlich oft* wiederhole und den allgemeinen Fall auf den fast trivialen Grenzfall $p \to \infty$ zurückführe. Genauer gesagt ist dieser Grenzübergang nur der leitende Gedanke meines Beweises; tatsächlich ersetze ich ihn in § 2 durch eine einfache Abschätzung für große Werte von p.

§ 1.

Die folgenden Ausführungen gelten fast wörtlich für orthogonale Systeme von Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen, die auf beliebigen meßbaren Mengen definiert sind, wie auch für Orthogonalsysteme auf abstrakten Mengen; um die Schreibweise festzulegen, beziehe ich mich auf ein Intervall $(a\,b)$. Ferner beschränke ich mich auf reellwertige Funktionen; die Übertragung nach bekanntem Muster auf komplexwertige liegt auf der Hand.

Es sei $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ein aus n auf $(a\,b)$ definierten Funktionen bestehendes normiertes Orthogonalsystem, d. i. es sollen die Beziehungen

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \begin{matrix} 1 & \text{für} & i = k \\ 0 & & i \neq k \end{matrix}$$

stattfinden. Seien

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

die Fourier-Konstanten der integrierbaren Funktion $f(x)$ in bezug auf das Orthogonalsystem. Wir setzen

$$J_\alpha(f) = J_\alpha = \int_a^b |f(x)|^\alpha \, dx; \qquad S_\beta(f) = S_\beta = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^\beta;$$

dabei bedeuten α und β zwei positive Zahlen, für welche $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, $\alpha < \beta$, also $1 < \alpha < 2 < \beta$ ist[3]).

Wir fragen nun nach jener Funktion, für welche der Quotient

$$J_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \Big/ S_\beta^{\frac{1}{\beta}} \tag{2}$$

möglichst klein wird. Wir können dabei aus Homogeneitätsgründen $S_\beta = 1$ annehmen; ist dann $f^*(x)$ eine Minimalfunktion bei dieser Nebenbedingung, so wird der Quotient (2) für $f(x) = cf^*(x)$ $(c \neq 0$, sonst beliebig) zum Minimum. Nun besitzt $J_\alpha(f)$, wenn $f(x)$ der Bedingung $S_\beta = 1$ gemäß variiert wird, jedenfalls eine untere Schranke $J_\alpha^* \geqq 0$; sei $f_1(x), f_2(x), \ldots$ eine entsprechende Minimalfolge:

$$S_\beta(f_n) = 1; \qquad J_\alpha(f_n) \to J_\alpha^*.$$

Nach einem bekannten Satze gibt es dann eine Teilfolge $\{f^{(n)}(x)\}$, die in bezug auf den Exponenten α schwach gegen eine Funktion $f^*(x)$ konvergiert, d. i. in dem Sinne, daß für jede samt der β-ten Potenz ihres Betrages integrierbaren Funktion $g(x)$ die Gleichung

$$\int_a^b f^{(n)}(x)\, g(x)\, dx \to \int_a^b f^*(x)\, g(x)\, dx \tag{3}$$

besteht; ferner ist

$$J_\alpha(f^*) \leqq J_\alpha \,.^4) \tag{4}$$

Aus (3) folgt, indem man für $g(x)$ die Funktionen $\varphi_k(x)$ einsetzt,

$$S_\beta(f^{(n)}) \to S_\beta(f^*)$$

und somit wegen $S_\beta(f^{(n)}) = 1$ auch

$$S_\beta(f^*) = 1. \tag{5}$$

Also ist f^* selbst eine konkurrenzfähige Funktion und somit

$$J_\alpha(f^*) \geqq J_\alpha^*,$$

---

[3]) Ich schließe mich damit der Hausdorffschen Schreibweise an. In der Youngschen ist $\alpha = 1 + \frac{1}{p}$, $\beta = 1 + p$ $(p > 1)$, in meinen älteren Arbeiten $\alpha = \frac{p}{p-1}$, $\beta = p$ $(p > 2)$ oder $\alpha = p$, $\beta = \frac{p}{p-1}$ $(1 < p < 2)$.

[4]) Vgl. meine Arbeit: Über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen **69** (1910), S. 449—497, §§ 6—7.

d. h. es muß in (4) das Gleichheitszeichen gelten; ferner ist ebenfalls wegen (5) $f^*(x)$ auf einer Menge von positivem Maße von Null verschieden; also ist

$$J_\alpha(f^*) = J_\alpha > 0.$$

Es kommt uns nun nicht darauf an, die Minimalfunktion tatsächlich zu bestimmen; für unsere Zwecke genügen die Existenz und jene Eigenschaften der Funktion $f^*(x)$, die aus dem Verschwinden der ersten Variation folgen. Mit anderen Worten: da die Funktion von λ

$$Q(\lambda) = \frac{[J_\alpha(f^*+\lambda h)]^{\frac{1}{\alpha}}}{[S_\beta(f^*+\lambda h)]^{\frac{1}{\beta}}},$$

wo $h(x)$ eine beliebige samt der α-ten Potenz ihres Betrages integrierbare Funktion ist, für $\lambda = 0$ zum Minimum wird, so ist $Q'(0) = 0$; also ist, wenn $h_1, h_2, \ldots$ die Fourier-Konstanten der Funktion $h(x)$ bedeuten:

$$\int_a^b |f^*(x)|^{\alpha-1} (\operatorname{sign} f^*)\, h(x)\, dx = J_\alpha^* \sum_{k=1}^{n} |c_k|^{\beta-1} (\operatorname{sign} c_k)\, h_k.$$

Setzt man in dieser Formel speziell

$$h(x) = \varphi_k(x) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

so erhält man für die Fourier-Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ der Funktion $F(x) = |f^*(x)|^{\alpha-1} \operatorname{sign} f^*$ die Werte

$$C_k = J_\alpha^* |c_k|^{\beta-1} \operatorname{sign} c_k;$$

wählt man andererseits für $h(x)$ eine beliebige zu sämtlichen $\varphi_k(x)$ orthogonale Funktion (für welche also $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = 0$), so ergibt sich, daß diese auch zu der Funktion $F(x)$ orthogonal ist. Somit ist bis auf eine Nullmenge

$$F(x) = |f^*(x)|^{\alpha-1} \operatorname{sign} f^* = J_\alpha^* \sum_{k=1}^{n} |c_k|^{\beta-1} (\operatorname{sign} c_k)\, \varphi_k(x)$$

und also nach der Besselschen Formel

$$(6) \qquad J_{2(\alpha-1)}(f^*) = \int_a^b F^2(x)\, dx = J_\alpha^{*2} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^{2(\beta-1)} = J_\alpha^{*2} S_{2(\beta-1)}(f^*).$$

Es sei nun $\beta_1 = 2(\beta-1)$, $\alpha' = 2(\alpha-1)$ und α_1 werde aus der Formel $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} = 1$ bestimmt, also

$$\alpha_1 = \frac{2(\beta-1)}{2\beta-3} = \frac{2}{3-\alpha} = t\alpha + (1-t)\alpha' \qquad \left(t = 2\frac{2-\alpha}{3-\alpha},\ 1-t = \frac{\alpha-1}{3-\alpha}\right).$$

Dann ist auf Grund der sog. Schwarz-Hölderschen Ungleichung

$$\int_a^b |f^*(x)|^{\alpha_1} dx = \int_a^b |f^*(x)|^{t\alpha} |f(x)|^{(1-t)\alpha'} dx$$

$$\leqq \left[\int_a^b |f^*(x)|^{\alpha} dx\right]^t \left[\int_a^b |f^*(x)|^{\alpha'} dx\right]^{1-t},$$

d. i.

$$J_{\alpha_1}(f^*) \leqq [J_\alpha^*]^{2\frac{2-\alpha}{3-\alpha}} [J_{2(\alpha-1)}(f^*)]^{\frac{\alpha-1}{3-\alpha}};$$

setzt man hier den Wert von $J_{2(\alpha-1)}$ aus (6) ein, so ergibt eine einfache Umformung die Ungleichung

$$(7) \qquad J_\alpha^* \geqq \frac{[J_{\alpha_1}(f^*)]^{\frac{1}{\alpha_1}}}{[S_{\beta_1}(f^*)]^{\frac{1}{\beta_1}}} \geqq (J_{\alpha_1}^*)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

wo wir mit $J_{\alpha_1}^*$ das Minimum von $J_{\alpha_1}(f)$ bei der Bedingung $S_{\beta_1} = 1$ bezeichnen, $(J_{\alpha_1}^*)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ also das Minimum des Quotienten

$$J_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} \Big/ S_{\beta_1}^{\frac{1}{\beta_1}}$$

ist.

§ 2.

Wir machen nun die weitere Annahme

$$(8) \qquad |\varphi_k(x)| \leqq 1 \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Ich behaupte, daß dann $J_\alpha^* \geqq 1$ sein muß. Um dies zu beweisen, nehme ich $J_\alpha^* = \theta < 1$ an und leite daraus mittels (7) einen Widerspruch ab. Dann ist nämlich nach (7)

$$J_{\alpha_1}^* \leqq (J_\alpha^*)^{\alpha_1} < J_\alpha^* = \theta.$$

Setzen wir $\beta_\nu = 2(\beta_{\nu-1} - 1) = 2 + 2(\beta_{\nu-1} - 2)$, also $\beta_\nu = 2 + 2^\nu(\beta - 2)$, und bestimmen α_ν aus $\frac{1}{\alpha_\nu} + \frac{1}{\beta_\nu} = 1$, so ist aus demselben Grunde $J_{\alpha_\nu}^* < J_{\alpha_{\nu-1}}^*$, daher auch $J_{\alpha_\nu}^* < \theta$. Also gibt es eine Funktion $f(x)$, für welche

$$(9) \qquad J_{\alpha_\nu}(f) < \theta, \qquad S_{\beta_\nu}(f) = 1$$

ist; für die Fourier-Konstanten c_k dieser Funktion folgt nach (8)

$$(10) \qquad |c_k| = \left|\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx \leqq (b-a)^{\frac{1}{\beta_\nu}} (J_{\alpha_\nu}(f))^{\frac{1}{\alpha_\nu}},$$

wie durch Anwendung der Schwarz-Hölderschen Ungleichung auf die Funktionen 1 und $f(x)$ hervorgeht.

Aus (9) und (10) folgt schließlich

$$1 = S_{\beta_\nu}(f) = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^{\beta_\nu} \leqq n(b-a)\theta^{\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}}, \tag{11}$$

und zwar für beliebig große Werte von ν, was jedoch der Tatsache widerspricht, daß für $\nu \to \infty$ auch $\beta_\nu \to \infty$, $\alpha_\nu \to 1$ und somit der Wert des in (11) rechtsstehenden Ausdruckes gegen Null konvergiert.

Damit ist die Annahme $J_\alpha^* < 1$ widerlegt und also die Behauptung bewiesen.

Den allgemeineren Fall, wo statt (8)

$$|\varphi_k| \leqq M \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

vorausgesetzt wird, kann man durch die Substitution $M^2 x = \xi$ auf den soeben behandelten zurückführen. Denn die Funktionen

$$\chi_k(\xi) = \frac{1}{M}\varphi_k\left(\frac{\xi}{M^2}\right)$$

sind auf dem Intervall (aM^2, bM^2) orthogonal und normiert und es ist $|\chi_k(\xi)| \leqq 1$; außerdem besitzt die Funktion $\frac{1}{M}f\left(\frac{\xi}{M^2}\right)$ in bezug auf die χ_k dieselben Fourier-Konstanten wie $f(x)$ in bezug auf die φ_k. Daraus folgt, daß unter der Bedingung $S_\beta(f) = 1$

$$\int_{aM^2}^{bM^2} \left|\frac{1}{M}f\left(\frac{\xi}{M^2}\right)\right|^\alpha d\xi \geqq 1$$

und somit

$$J_\alpha^*(f) = \int_a^b |f(x)|^\alpha dx \geqq M^{\alpha-2}$$

ist. Daraus folgt unter Beachtung der Homogeneität allgemein

$$[S_\beta(f)]^{\frac{1}{\beta}} \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} [J_\alpha(f)]^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{12}$$

Wird endlich das normierte Orthogonalsystem $\{\varphi_k(x)\}$ aus unendlich vielen Funktionen gebildet, die sämtlich die Bedingung $|\varphi_k(x)| \leqq M$ erfüllen, so besteht (12) für alle Teilsummen der Reihe $\Sigma |c_k|^\beta$, also auch für die Summe der Reihe. Wir haben somit die folgende Verallgemeinerung der bekannten Besselschen Ungleichung:

C. *Ist $\{\varphi_k(x)\}$ ein normiertes System von endlich oder unendlich vielen orthogonalen Funktionen, d. h. ist*

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx = \begin{matrix} 1 & \text{für} & i = k \\ 0 & & i \neq k \end{matrix},$$

sind ferner sämtliche Funktionen $\varphi_k(x)$ dem Betrage nach $\leqq M$ und

bedeuten $c_1, c_2, \ldots$ *die entsprechenden Fourier-Konstanten einer Funktion* $f(x)$, *ist endlich* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, $0<\alpha<\beta$, *so ist*

$$\left[\sum_k |c_k|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}} \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left[\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Der Youngsche Satz **B** und seine Verallgemeinerung auf ein beliebiges beschränktes Orthogonalsystem sind in dem soeben bewiesenen Satze enthalten.

§ 3.

Die Verallgemeinerung des Satzes **A** und die entsprechende Ungleichung folgen aus obigem Satze durch eine geläufige Schlußweise. Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ beliebige Konstanten und bilden wir die Funktion

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi_k(x).$$

Dann ist unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen

$$\left|\int_a^b f(x) g_n(x)\, dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \gamma_k\right| \leqq \left[\sum_{k=1}^{n} |c_k|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}} \left[\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

also nach Satz **C**

$$\left|\int_a^b f(x) g_n(x)\, dx\right| \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left[\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Setzt man hier speziell

$$f(x) = |g_n(x)|^{\beta-1} \operatorname{sign} g_n,$$

so folgt (da $\alpha(\beta-1)=\beta$, $1-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}$ ist)

$$\left[\int_a^b |g_n(x)|^\beta dx\right]^{\frac{1}{\beta}} \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left[\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{13}$$

Es sei nun $\{\varphi_n(x)\}$ ein unendliches normiertes Orthogonalsystem und es seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ Konstanten, für welche die Reihe $\Sigma |\gamma_k|^\alpha$ konvergiert. Die Bedingung $|\varphi_k(x)| \leqq M$ sei für alle k erfüllt. Dann bleibt nach (12) für die Teilsumme $g_n(x)$ der unendlichen Reihe $\gamma_1\varphi_1(x)+\gamma_2\varphi_2(x)+\ldots$ das Integral von $|g_n|^\beta$ unterhalb einer von n unabhängigen Schranke und es läßt sich daher aus der Folge der $g_n(x)$ eine Teilfolge aussondern, die in bezug auf den Exponenten β schwach gegen eine Funktion $g(x)$ konvergiert. Die Funktionen $g(x)$ und $|g(x)|^\beta$ sind integrierbar und das Integral der letzteren ist $\leqq$ als die obere

Schranke des Integrals von $|g_n|^\beta$. Schließlich folgt aus dem Begriffe der schwachen Konvergenz, daß $g(x)$ die gegebenen Konstanten γ_k zu Fourier-Konstanten hat. Es gilt somit der Satz, in welchem Satz **A** als Spezialfall enthalten ist:

D. *Ist $\{\varphi_k(x)\}$ ein normiertes System von endlich oder unendlich vielen orthogonalen Funktionen, die dem Betrage nach alle $\leqq M$ sind; konvergiert ferner die Summe $\sum |\gamma_k|^\alpha$ für einen Exponenten $\alpha\,(1<\alpha<2)$, so sind die γ_k Fourier-Konstanten einer integrierbaren Funktion $g(x)$, für welche außerdem*

$$\left[\int_a^b |g(x)|^\beta dx\right]^{\frac{1}{\beta}} \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left[\sum_k |\gamma_k|^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\right)$$

ausfällt.

Zum Schlusse sei noch der folgende Satz angeführt, der sowohl in **C** wie auch in **D** als Spezialfall (streckenweise konstante Funktionen) enthalten ist:

Geht das Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ durch eine orthogonale Substitution mit der Determinante ± 1 in das System $\xi_1, \ldots, \xi_n$ über und sind sämtliche Koeffizienten der Substitution dem Betrage nach $\leqq M$, so ist

$$\left[\sum_{k=1}^n |\xi_k|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}} \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1,\ 1<\alpha<\beta\right).$$

Es wäre erwünscht, diesen Satz rein arithmetisch zu beweisen, besonders deshalb, da auch, wie wir mit meinem Kollegen A. Haar im Laufe eines Gespräches erkannt haben, aus diesem scheinbar spezielleren Satze die Sätze **C** und **D** für den Fall streckenweise konstanter Funktionen unmittelbar, für den allgemeinen Fall durch einen Grenzprozeß hervorgehen.

(Eingegangen am 15. Dezember 1922.)

Über das Eulersche Summierungsverfahren.

(II. Mitteilung.)

Von

Konrad Knopp in Königsberg.

Einleitung.

Die vorliegende Mitteilung schließt sich an die Arbeit gleichen Titels an, die in Bd. 15 dieser Zeitschrift (S. 226—253, 1922) veröffentlicht wurde und die im folgenden kurz als „I" zitiert werden soll. Die dortigen Untersuchungen sollen nach den verschiedensten Richtungen hin fortgesetzt und vertieft werden:

In § 1 soll der zur E_p-Summierbarkeit gehörige Abelsche Grenzwertsatz (s. I, Fußnote [22]) bewiesen werden. In § 2 wird die E_p-Summierbarkeit der Cauchyschen Produktreihe $\Sigma(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)$ zweier E_p-summierbarer Reihen Σa_n und Σb_n untersucht. Es ergeben sich insbesondere genaue Analoga zu den bei konvergenten Reihen gültigen Sätzen von Abel und Mertens.

Die folgenden Paragraphen sollen das Verhältnis der E-Summierbarkeit zu den Summierungsverfahren von Cesàro (bzw. Hölder) und Borel und zur gewöhnlichen Konvergenz klären, welch letztere wir dabei der Einheitlichkeit halber bisweilen auch als K-Summierbarkeit bezeichnen.

In § 3 werden Sätze aufgestellt, durch die von der E-Summierbarkeit auf die Konvergenz oder K-Summierbarkeit geschlossen werden kann, also kurz $E \to K$-Sätze. Es sind dies Sätze, die einer Gruppe schöner und zum Teil sehr tief gelegener Sätze angehören, für die der bekannte Tauber sche Satz (1897) das älteste Beispiel ist, und die dann zumeist von G. H. Hardy und J. E. Littlewood in den Jahren 1909—1915 gefunden worden sind. Über diese Sätze wird weiter unten noch Genaueres gesagt werden.

In § 4 werden Sätze bewiesen, durch die von der E-Summierbarkeit auf die Cesàrosche oder C-Summierbarkeit geschlossen werden kann, also

$E \to C$-Sätze; in § 5 umgekehrt Sätze, die von der C- auf die E-Summierbarkeit zu schließen gestatten, also $C \to E$-Sätze.

In § 6 und § 7 wird das Verhältnis der E-Summierbarkeit zur Borelschen oder B-Summierung untersucht; § 6 gibt einen (abschließenden) $E \to B$-Satz, § 7 umgekehrt einen $B \to E$-Satz.

In § 8 werden noch verschiedene Sätze über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande der Kreisbogenpolygone ihrer E-Summierbarkeit aufgestellt und bewiesen. Es drängen sich dabei von selbst gewisse kombinierte Summierungsverfahren auf, die als AE- oder CE-Summierung zu bezeichnen wären, wenn durch A die Abelsche Summierung bezeichnet wird.

Wir bedienen uns bei diesen Untersuchungen konsequent der folgenden Bezeichnungen:

Ein Verfahren, durch das einer Reihe Σa_n in einem verallgemeinerten Sinne eine Summe s bzw. einer Folge (s_n) ein Grenzwert s zugeordnet wird, wird durch einen großen lateinischen Buchstaben charakterisiert, also etwa als V-Verfahren bezeichnet. Wir sprechen dann von der V-Summierung der Reihe Σa_n zur Summe oder zum Werte s bzw. der V-Limitierung der Folge (s_n) zum (Grenz-)Werte s, schreiben kurz

$$V\text{-}\Sigma a_n = s \quad \text{bzw.} \quad V\text{-}\lim s_n = s$$

und nennen s die V-Summe der Reihe Σa_n bzw. den V-Limes der Folge (s_n). Läßt das Verfahren verschiedene Ordnungen zu, eine 1-te, 2-te, ..., p-te, ..., so kommt eine V_p-Summierung oder V_p-Limitierung in Frage und es wäre von einer V_p-Summe der Reihe bzw. dem V_p-Limes der Folge zu sprechen, die durch

$$V_p\text{-}\Sigma a_n = s \quad \text{bzw.} \quad V_p\text{-}\lim s_n = s$$

bezeichnet werden. Ist das Verfahren im Sinne von I, S. 226 eine lineare Mittelbildung, so nennen wir die dort genannte Folge (s_k') die V- oder V_p-Transformierte der Folge (s_n), und die Reihe $\Sigma a_k'$, deren Teilsummen diese Zahlen s_k' sind, nennen wir ebenso die V- oder V_p-Transformation der Reihe Σa_n.

§ 1.

Der Abelsche Grenzwertsatz für die E_p-Summierung.

Wenn eine Potenzreihe $\Sigma c_n z^n$ in einem Punkte $z_1 \neq 0$ konvergiert, so konvergiert sie auch für alle $|z| < |z_1|$, und die durch sie dargestellte Funktion $f(z)$ ist in diesem Kreise $|z| < |z_1|$ regulär. Aber darüber hinaus sagt der Abelsche Grenzwertsatz, daß

$$\lim_{z \to z_1} f(z) = \Sigma c_n z_1^n$$

ist, wenn z aus dem Innern des genannten Kreises „im Winkelraum“ $\to z_1$

strebt[1]). Eine dieser bekannten Sachlage sehr ähnliche liegt vor, wenn $\Sigma c_n z_1^n$ nur als E_p-summierbar vorausgesetzt wird:

Satz 1. *Die Potenzreihe* $\Sigma c_n z^n$ *sei in einem Punkte* $z_1 \neq 0$ *von einer bestimmten (positiven) Ordnung* E_p*-summierbar und es sei*

$$E_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_1^n = s.$$

Dann kann man hieraus schließen:

a) *Der Konvergenzradius der Potenzreihe* $\Sigma c_n z^n$ *ist* $\geqq \frac{|z_1|}{2^{p+1}-1}$.

b) *Die durch* $\Sigma c_n z^n$ *in der Umgebung des Nullpunktes dargestellte Funktion* $f(z)$ *ist mindestens im Innern des durch*

$$\left|\frac{z}{z_1} - \frac{q}{2q+1}\right| \leqq \frac{q+1}{2q+1} \qquad (q = 2^p - 1)$$

definierten Kreises $\mathfrak{K}_p(z_1)$ *regulär*[2]).

c) *Die Reihe* $\Sigma c_n z^n$ *ist mindestens in dem durch*

$$\left|\frac{z}{z_1}\right| + \frac{q}{q+1}\left|\frac{z}{z_1} - 1\right| < 1$$

definierten, im Innern von $\mathfrak{K}_p(z_1)$ *gelegenen Bereiche* $B_p(z_1)$ *absolut* E_p*-summierbar zur Summe* $f(z)$.[3])

d) *Es ist*

$$\lim_{z \to z_1} E_p\text{-}\Sigma c_n z^n = s = E_p\text{-}\Sigma c_n z_1^n,$$

wenn z *innerhalb* $B_p(z_1)$ *bleibend* $\to z_1$ *strebt.* (Vgl. Fig. 1, in der der Kreis $\mathfrak{K}_p(z_1)$ gestrichelt, der Rand des Bereiches $B_p(z_1)$ ausgezogen und das durch a) gesicherte Konvergenzgebiet von $\Sigma c_n z^n$ schraffiert ist. Dabei ist $p = 1$ angenommen.)

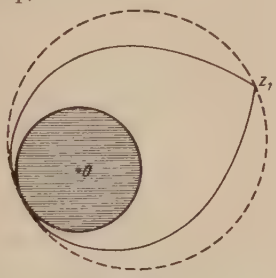

Fig. 1.

Beweis. Es ist — mit der Abkürzung $2^p - 1 = q$ —

$$e^{qz} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{0} q^n s_0 + \binom{n}{1} q^{n-1} s_1 + \ldots + \binom{n}{n} s_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^{(p)}}{n!} (q+1)^n z^n,$$

[1]) Ist z_0 ein Randpunkt eines Kreises $\mathfrak{K}$, so sagen wir, daß z aus dem Innern „im Winkelraum“ gegen z_0 strebe, falls z ein im Innern von $\mathfrak{K}$ liegendes Dreieck schließlich nicht mehr verläßt, das von z_0 und irgend zwei inneren Punkten von $\mathfrak{K}$ gebildet wird.

[2]) Vgl. I, § 2, Satz 3, wo der Kreis nur durch $\mathfrak{K}(z_1)$ bezeichnet wurde.

[3]) Vgl. I, § 2, Satz 4. — Die sehr naheliegende Definition der *absoluten* E_p-Summierbarkeit ist am Ende von § 2 dieser Arbeit besonders formuliert.

wenn s_n die Teilsummen irgendeiner Reihe Σa_n und $s_n^{(p)}$ diejenigen ihrer E_p-Transformierten bedeuten (vgl. I, S. 237 und 245). Demgemäß ist

$$\sum \frac{s_n}{n!} z^n = e^{-qz} \sum \frac{s_n^{(p)}}{n!} (q+1)^n z^n$$

und also

$$s_n = \binom{n}{0}(q+1)^n s_n^{(p)} - \binom{n}{1}(q+1)^{n-1} \cdot q \cdot s_{n-1}^{(p)} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} q^n \cdot s_0^{(p)}.$$

Wird nun Σa_n als E_p-summierbar vorausgesetzt, so ist die Folge der $s_n^{(p)}$ konvergent, also beschränkt, etwa stets $|s_n^{(p)}| < K$. Dann ist aber

$$|s_n| < K \cdot \left[\binom{n}{0}(q+1)^n + \binom{n}{1}(q+1)^{n-1} \cdot q + \ldots + \binom{n}{n} q^n\right] = K(2q+1)^n.$$

Daher hat $\Sigma s_n z^n$ und also auch $\Sigma a_n z^n$ mindestens den Radius $\frac{1}{2q+1}$. Identifiziert man Σa_n mit der als E_p-summierbar vorausgesetzten Reihe $\Sigma c_n z_1^n$, so sieht man, daß $\Sigma c_n z^n$ mindestens den Radius $\frac{|z_1|}{2q+1} = \frac{|z_1|}{2^{p+1}-1}$ hat[4]).

Die Behauptungen b) und c) sind nun mit den Sätzen 3 und 4 in I, § 2 identisch, während d) den wesentlich neuen Inhalt des Satzes 1 bildet. Setzen wir, wie bei den eben erwähnten Sätzen aus I, § 2, wieder $c_n z_1^n = a_n$ und $z = z_1 t$, so ist zu zeigen, daß die E_p-Summe von $\Sigma a_n t^n$, die nach c) sicher vorhanden ist, wenn t in dem Bereiche $B_p(1)$ der t-Ebene

$$B_p(1): \qquad |t| + \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)|t-1| < 1$$

liegt, gegen $s = E_p\text{-}\Sigma a_n$ strebt, falls t in $B_p(1)$ gegen 1 rückt. Nun ist

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

nach a) in einer Umgebung des Nullpunktes regulär, und beim Beweise des Satzes 3 aus I, § 2, ist gezeigt, daß auch

$$\psi(t) = \frac{q+1}{1+qt} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{(q+1)t}{1+qt}\right)^n$$

ist, wenn $\Sigma A_n = \Sigma a_n^{(p)}$ die E_p-Transformation von Σa_n ist. Setzen wir

$$\frac{(q+1)t}{1+qt} = \tau,$$

[4]) Übrigens ist dies das Genaueste, was sich allgemein über den Konvergenzradius von $\Sigma c_n z^n$ aus der E_p-Summierbarkeit von $\Sigma c_n z_1^n$ schließen läßt, denn schon die geometrische Reihe Σz^n ist (s. I, § 2, 1. Beispiel) in beliebig dicht bei $-(2^{p+1}-1)$ gelegenen Punkten E_p-summierbar und hat genau den Radius 1.

so ist wegen $\Sigma A_n = s$ nach dem klassischen Abelschen Grenzwertsatz für konvergente Reihen

$$\lim_{\tau \to +1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tau^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = s,$$

wenn τ aus dem Innern des Einheitskreises „im Winkelraum" gegen $+1$ rückt. Das ist aber im wesentlichen der Inhalt unserer Behauptung d). Denn durch $\tau = \frac{(q+1)t}{1+qt}$ wird das Innere des Einheitskreises der τ-Ebene auf das Innere des Kreises $\mathfrak{K}_p(1)$ der t-Ebene

$$\mathfrak{K}_p(1): \qquad (q+1)|t| = |1+qt|$$

linear abgebildet. In diesem letzteren liegt aber der Bereich $B_p(1)$, und zwar derart, daß t „im Winkelraum" gegen 1 rückt, falls es nur in $B_p(1)$ verbleibt. Wegen der Winkeltreue und Kreisverwandtschaft der linearen Abbildung rückt folglich auch τ aus dem Innern des Einheitskreises „im Winkelraum" gegen $+1$. Also ist bei dieser Bewegung von $t \to +1$ wirklich

$$\lim \psi(t) = s.$$

Da aber, solange t in $B_p(1)$ liegt,

$$\psi(t) = E_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

ist, so ist damit die Behauptung d) bewiesen, deren genauen Wortlaut man erhält, wenn man zum Schluß wieder $a_n = c_n z_1^n$ und $z_1 t = z$ setzt.

Zusatz 1. Da $\psi(t)$ nach b) in dem ganzen Kreise $\mathfrak{K}_p(1)$ regulär ist, so gilt die Beziehung $\lim \psi(t) = s$ für $t \to 1$ sogar dann noch, wenn t, aus dem Innern von $\mathfrak{K}_p(1)$ kommend, irgendwie „im Winkelraum" — also nicht auf $B_p(1)$ beschränkt — gegen $+1$ rückt. Demgemäß gilt

$$\lim_{z \to z_1} f(z) = s$$

auch noch, wenn z, aus dem Innern von $\mathfrak{K}_p(z_1)$ kommend, sich irgendwie „im Winkelraum" gegen z_1 bewegt.

Zusatz 2. Genau wie der klassische Abelsche Grenzwertsatz den Anlaß zur Aufstellung eines Abelschen oder A-Summierungsverfahrens bildet (nach dem Σa_n als A-summierbar zum Werte s bezeichnet wird, falls, im Sinne gewöhnlicher Konvergenz, $\lim \Sigma a_n x^n = s$ ist für $x \to +1-0$), kann der jetzige Satz zur Aufstellung eines kombinierten Abel-Eulerschen oder AE-Verfahrens benutzt werden. Nach ihm wäre Σa_n als AE_p-summierbar zu bezeichnen, wenn für $0 \leqq x < 1$ die E_p-$\Sigma a_n x^n$ existiert und für $x \to +1$ gegen s strebt. In ähnlicher Weise hat G. Doetsch[5]) ein

[5]) Doetsch, G.: *Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen*, Inaug.-Diss., Göttingen 1920. Vgl. besonders S. 18 und S. 45.

kombiniertes Borel-Cesàrosches oder BC_p-Verfahren untersucht. Das Symbol AE darf dabei an das Produkt zweier Matrizen erinnern, das in der Tat diesem kombinierten Verfahren zugrunde liegt. — Eine wesentliche Ergänzung dieser Betrachtungen wird noch in § 8 gebracht werden.

§ 2.

Die E-Summierbarkeit des Cauchyschen Produkts zweier Reihen.

Sind Σa_n und Σb_n irgend zwei unendliche Reihen, so bezeichnet man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit} \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

als ihr Cauchysches Produkt. Sind die Reihen Σa_n und Σb_n *beide absolut* konvergent und sind α und β ihre (gewöhnlichen) Summen, so zeigte schon Cauchy, daß Σc_n wieder konvergiert und die Summe $\gamma = \alpha \cdot \beta$ hat. Mertens zeigte, daß zu diesen Schlüssen die absolute Konvergenz *einer* der beiden Reihen Σa_n und Σb_n schon ausreicht, wofern die andre nur überhaupt konvergiert. Andererseits hatte schon Abel bewiesen, daß, *wenn* alle drei Reihen konvergieren, zwischen ihren Summen α, β, γ die zu erwartende Beziehung $\alpha \cdot \beta = \gamma$ besteht[6]).

Die entsprechende Fragestellung bei E-summierbaren Reihen läßt ganz analoge Antworten zu. Es gelten die folgenden beiden Sätze.

Satz 2 (Abelscher Produktsatz). *Die beiden Reihen Σa_n, Σb_n, sowie deren Cauchysches Produkt Σc_n seien alle drei E_p-summierbar für ein und dasselbe (positive) p. Ihre E_p-Summen seien α, β, γ. Dann ist $\alpha \cdot \beta = \gamma$.*

Beweis. Nach § 1, Satz 1, a) sind die drei Reihen

$$f_a(x) = \Sigma a_n x^{n+1}, \quad f_b(x) = \Sigma b_n x^{n+1}, \quad f_c(x) = \Sigma c_n x^{n+1}$$

für $|x| < \frac{1}{2^{p+1}-1}$ absolut konvergent und es besteht zwischen ihnen (nach dem erwähnten Cauchyschen Satze) die Beziehung

$$f_a(x) \cdot f_b(x) = x \cdot f_c(x).$$

Da diese drei Funktionen aber nach § 1, Satz 1, b) in dem dort definierten Kreise $\mathfrak{K}_p(1)$ noch regulär sind und nach Behauptung d) desselben Satzes bei (etwa radialer) Annäherung von $x \to 1$

$$\lim f_a(x) = \alpha, \quad \lim f_b(x) = \beta, \quad \lim f_c(x) = \gamma$$

ist, so ist in der Tat $\alpha \cdot \beta = \gamma$.

[6]) Vgl. etwa mein Lehrbuch „*Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*", Berlin 1922, S. 140 und S. 312/13.

Satz 3 (Mertensscher Produktsatz). *Die beiden Reihen* Σa_n *und* Σb_n *seien* E_p*-summierbar für ein und dasselbe* p*, d. h. ihre* E_p*-Transformierten* $\Sigma a_n^{(p)}$ *und* $\Sigma b_n^{(p)}$ *seien konvergent. Wenn dann von diesen letzteren Reihen wenigstens eine absolut konvergiert, so ist die Cauchysche Produktreihe* Σc_n *gleichfalls* E_p*-summierbar und zwischen den* E_p*-Summen* α, β, γ *der drei Reihen besteht die zu erwartende Beziehung* $\alpha\beta = \gamma$.

Beweis. Setzen wir wieder $2^p - 1 = q$, so ist für $x = \frac{y}{1 - qy}$

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p)} (q+1)^{n+1} y^{n+1},$$

$$f_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(p)} (q+1)^{n+1} y^{n+1},$$

$$f_c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(p)} (q+1)^{n+1} y^{n+1}.$$

Da andererseits

$$f_a(x) \cdot f_b(x) = x \cdot f_c(x),$$

so hat man die Identität

$$y \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a_0^{(p)} b_n^{(p)} + \ldots + a_n^{(p)} b_0^{(p)}) (q+1)^{n+2} y^{n+1} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(p)} (q+1)^{n+1} y^{n+1},$$

woraus wegen $x = \frac{y}{1 - qy}$ für $n \geqq 1$ die Beziehung

$$(q+1)\,[a_0^{(p)} b_n^{(p)} + \ldots + a_n^{(p)} b_0^{(p)}] - q \cdot [a_0^{(p)} b_{n-1}^{(p)} + \ldots + a_{n-1}^{(p)} b_0^{(p)}] = c_n^{(p)}$$

folgt, während $(q+1) a_0^{(p)} b_0^{(p)} = c_0^{(p)}$ ist.

Da nun nach Voraussetzung wenigstens *eine* der beiden Reihen $\Sigma a_n^{(p)}$ und $\Sigma b_n^{(p)}$ absolut konvergiert, so ist nach dem eingangs erwähnten Satz von Mertens auch deren Cauchysche Produktreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0^{(p)} b_n^{(p)} + \ldots + a_n^{(p)} b_0^{(p)})$$

konvergent und $= \alpha\beta$. Nach der letzten Darstellung von $c_n^{(p)}$ ergibt sich nun sofort die Konvergenz der Reihe $\Sigma c_n^{(p)}$ und für ihre Summe γ die Gleichung

$$\gamma = (q+1)\,\alpha\beta - q\,\alpha\beta = \alpha\beta,$$

die zu beweisen war.

Bemerkung. Auf Grund dieses Satzes erscheint es zweckmäßig, eine Reihe Σa_n als *absolut* E_p*-summierbar* zu bezeichnen, wenn ihre E_p-Transformierte $\Sigma a_n^{(p)}$ *absolut* konvergiert — eine Definition, die sich schon in I, § 2, Satz 1, 2 und 4 aufdrängte.

§ 3.

$E \to K$-Sätze.

In den jetzt folgenden Betrachtungen (§§ 3—7) soll das Konvergenzfeld der E-Summierbarkeit genauer abgesteckt und seine Beziehungen zu den Konvergenzfeldern einiger anderer Verfahren geklärt werden.

Die Anwendung eines jeden Summierungsverfahrens ist nach außen hin begrenzt, d. h. wenn eine Reihe gar zu divergent ist, so kann sie durch dasselbe nicht mehr summiert werden. So kann eine Reihe Σa_n nur dann (im gewöhnlichen Sinne) konvergent sein, wenn

$$\lim a_n = 0,$$

ja sogar nur, wenn

$$\lim \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + n a_n}{n} = 0, \quad \text{d. h. } C_1\text{-}\lim n a_n = 0$$

ist. Und dies ist in gewissem Sinne das äußerste, was sich allgemein sagen läßt. Ebenso kann die Reihe nur dann C_p-summierbar sein, wenn

$$C_p\text{-}\lim a_n = 0 \quad \text{und sogar} \quad C_{p+1}\text{-}\lim n a_n = 0$$

ist[7]). — Da die E_p-Summierbarkeit von Σa_n die gewöhnliche Konvergenz von $\Sigma a_n^{(p)}$ bedeutet, so ergibt sich hier $a_n^{(p)} \to 0$ oder also ganz analog den oben genannten Bedingungen

$$E_p\text{-}\lim a_n = 0$$

---

[7]) Der Vollständigkeit halber sei hier kurz ein direkter Beweis für die Notwendigkeit dieser Bedingung angegeben, bei dem ich die in § 4 erläuterten Bezeichnungen vorwegnehme: Die C_p-Summierbarkeit von Σa_n bedeutet die Existenz von

$$\lim \frac{S_n^{(p)}}{\binom{n+p}{p}} \quad \text{oder} \quad \lim \frac{S_0^{(p-1)} + \ldots + S_n^{(p-1)}}{\binom{n+p}{p}} \quad \text{oder} \quad \lim \frac{S_0^{(p-1)} + \ldots + S_n^{(p-1)}}{\binom{n+p+1}{p}}.$$

Ersetzt man im letzten Quotienten n durch $(n-1)$ und subtrahiert ihn vom vorangehenden, so ergibt sich $\lim S_n^{(p-1)} \Big/ \binom{n+p}{p} = 0$, was genau dasselbe wie $C_p\text{-}\lim a_n = 0$ besagt. — Andererseits sind mit $\sigma_n = S_n^{(p)} \Big/ \binom{n+p}{p}$ die Zahlen

$$\tau_n = n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = \frac{1}{\binom{n+p}{p}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+p-\nu-1}{p-1} \nu a_\nu,$$

wie man nach leichter Rechnung findet. Hiernach ist τ_n das n-te Glied in der C_p-Transformation der Folge (νa_ν). Da nun $C_1\text{-}\lim \tau_n = 0$ für die Konvergenz der Folge (σ_n) notwendig ist, so muß hiernach $C_{p+1}\text{-}\lim n a_n = 0$ sein. (Zu dem letzten Schluß bedarf es allerdings der Benutzung des sog. Äquivalenzsatzes für die Cesàroschen und Hölderschen Grenzwerte.)

als notwendige Bedingung. Und da umgekehrt jede Reihe als E_p-Transformation einer andern aufgefaßt werden kann, so ist dies im selben Sinne wie oben das äußerste, was aus der E_p-Summierbarkeit auf die Größenordnung der a_n geschlossen werden kann. Nach ähnlichen Rechnungen, wie zu Satz 1, a) in § 1, ist nun

$$\frac{a_n}{(q+1)^n} = \binom{n}{0}(q+1)^n a_n^{(p)} - \binom{n}{1}(q+1)^{n-1}\cdot q\cdot a_{n-1}^{(p)} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} q^n a_0^{(p)},$$

woraus man wegen $a_n^{(p)} \to 0$ in bekannter Weise[7a]) schließt, daß auch

$$\frac{a_n}{(2q+1)^n} \to 0$$

strebt. Zieht man analog die Teilsummen s_n und $s_n^{(p)}$ in Betracht, setzt $s_n^{(p)} = s + \varepsilon_n$ mit $\varepsilon_n \to 0$, so folgt wegen

$$s_n - s = \binom{n}{0}(q+1)^n \varepsilon_n - \binom{n}{1}(q+1)^{n-1}\cdot q\,\varepsilon_{n-1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} q^n \varepsilon_0,$$

daß auch

$$\frac{s_n}{(2q+1)^n} \to 0$$

streben muß. Darüber hinaus geht noch die folgende Bemerkung: Aus $s_n^{(p)} \to s$ folgt zunächst, daß auch die arithmetischen Mittel

$$\frac{s_0^{(p)} + s_1^{(p)} + \ldots + s_n^{(p)}}{n+1} \to s$$

streben, daß also $C_1 E_p\text{-}\lim s_n = s$ ist. Wegen der Vertauschbarkeit der C- und E-Verfahren ist also auch $E_p C_1\text{-}\lim s_n = s$, d. h.

$$E_p\text{-}\lim \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = s.$$

Mit $E_p\text{-}\lim s_n = s$ zusammen ergibt dies, daß

$$E_p\text{-}\lim \left(s_n - \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}\right) = E_p\text{-}\lim \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n+1} = E_p C_1\text{-}\lim (na_n) = 0$$

ist, — eine für die E_p-Summierbarkeit notwendige Bedingung, die nun genau der obengenannten Konvergenzbedingung analog ist[8]).

[7a]) Nach dem „Toeplitzschen Satze"; vgl. etwa mein in Fußnote [6]) genanntes Lehrbuch, S. 70/71, oder auch I, Fußnote [14]).

[8]) Mit genau denselben Schlüssen läßt sich allgemein beweisen, daß, wenn V irgend ein Summierungsverfahren der Klasse $\mathfrak{A}$ ist (vgl. I, § 4 und Fußnote 32), für die V-Summierbarkeit der Reihe Σa_n die Beziehung

$$V\text{-}\lim \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n+1} = V C_1\text{-}\lim (na_n) = 0$$

eine *notwendige* Bedingung darstellt.

Zusammenfassend haben wir also den

Satz 4. *Die vier Bedingungen*

$$E_p\text{-}\lim a_n = 0, \qquad \lim \frac{a_n}{(2^{p+1}-1)^n} = 0, \qquad \lim \frac{s_n}{(2^{p+1}-1)^n} = 0,$$

sowie

$$E_p\text{-}\lim \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + n a_n}{n+1} = 0$$

sind notwendig für die E_p-Summierbarkeit der Reihe Σa_n mit den Teilsummen s_n.

Sehr viel feiner ist eine Gruppe von Sätzen, deren ältester der bekannte Tauber sche Satz aus dem Jahre 1897 ist, während die übrigen zumeist von G. H. Hardy und J. E. Littlewood in den Jahren 1909 bis 1915 gefunden wurden[9]). Diese Sätze sollen eine Absteckung des Konvergenzfeldes nach innen bezwecken, womit dies gemeint ist: Zu den C_1-summierbaren Reihen — um an diesen den Sachverhalt zunächst zu erläutern — gehören außer gewissen divergenten Reihen auch alle gewöhnlichen konvergenten Reihen; wo liegt nun (gemessen an der Größenordnung der a_n) innerhalb des Bereiches aller C_1-summierbaren Reihen die Scheidelinie zwischen den konvergenten und den divergenten Reihen? Seit längerem war bekannt[10]), daß, wenn für eine C_1-summierbare Reihe Σa_n die Beziehung

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

besteht, diese Reihe im gewöhnlichen Sinne konvergent sein muß.

Im Jahre 1909 verschärfte G. H. Hardy[11]) den Satz dahin, daß er zeigte, daß schon das Bestehen der Beziehung

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

genügt, um aus der C_1-Summierbarkeit der Reihe Σa_n deren gewöhnliche Konvergenz zu folgern.

Ähnlich liegen die Dinge in den übrigen Fällen, wo aus einer Summierbarkeit nach einem bestimmten Verfahren auf die Konvergenz geschlossen

[9]) Ausführliche historische und sachliche Angaben findet man in dem Bericht über „*Neuere Untersuchungen in der Theorie der divergenten Reihen*", den ich am 22. Sept. 1922 auf der *Hundertjahrfeier der Naturforscher und Ärzte* vorgetragen habe und der in den *Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **32** (1923), S. 43–67, abgedruckt ist.

[10]) Als Folgerung aus dem oben genannten Tauberschen Satz fast selbstverständlich. Ein erster direkter Beweis bei Knopp: *Eine notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **25** (1908), S. 239.

[11]) G. H. Hardy: *Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series*, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, **8** (1910), S. 302.

werden soll: Bei einer bestimmten Größenordnung der a_n schlägt die Summierbarkeit um in die gewöhnliche Konvergenz. Und zwar ist der „o-Satz", bei dem eine Beziehung der Form „$a_n = o(n^\alpha)$" oder also „$n^{-\alpha} a_n \to 0$" vorausgesetzt wird, meist ziemlich leicht zu erkennen und zu beweisen, während der entsprechende „O-Satz", bei dem $a_n = O(n^\alpha)$ oder also nur die Beschränktheit von $(n^{-\alpha} a_n)$ vorausgesetzt wird, wesentlich tiefer liegt.

Hiernach ist es verständlich, wenn wir die eben besprochenen Sätze als „o-$C_1 \to K$-Satz" bzw. „O-$C_1 \to K$-Satz" bezeichnen, d. h. also als einen Satz, durch den auf Grund einer Beziehung der Form $a_n = o(n^\alpha)$ bzw. $O(n^\alpha)$ von der C_1-Summierbarkeit auf die Konvergenz geschlossen wird.

Für die Abelsche oder A-Summierbarkeit, die als $A\text{-}\lim s_n$ der Folge s_n den Grenzwert von $(1-x)\Sigma s_n x^n$ für $x \to +1$ einführt, liegen die Dinge ganz analog und das Umschlagen in die Konvergenz findet auch bei derselben Größenordnung der a_n statt. Der „o-$A \to K$-Satz" ist der schon mehrfach erwähnte Tauber sche Satz[12]), der in vieler Beziehung der Anlaß zu den Untersuchungen der jetzt in Rede stehenden Art war; der „O-$A \to K$-Satz" ist der sehr tiefgelegene Littlewoodsche Satz[13]), der erst 1910 bewiesen wurde.

Für die Borelsche oder B-Summierbarkeit haben Hardy und Littlewood die entsprechenden Sätze bewiesen. Die entscheidende Größenordnung ist hier bei $\frac{1}{\sqrt{n}}$; so daß der „o-$B \to K$-Satz" lautet: *Eine B-summierbare Reihe Σa_n, für die $a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist, muß sogar im gewöhnlichen Sinne konvergieren*[14]). Und der „O-$B \to K$-Satz" besagt, daß zu demselben Schluß schon die Annahme $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ genügend ist[15]). Der o-Satz wurde 1911, der O-Satz erst 1915 aufgestellt, und seinen Beweis bezeichnen die Verfasser als *decidedly difficult*.

An diese schließe ich mich nun im folgenden durchaus an, wenn ich unter Benutzung der von ihnen ausgebildeten Kunstgriffe und Beweismethoden jetzt die entsprechenden Sätze für die E-Summierbarkeit auf-

---

[12]) A. Tauber: *Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen*, Monatshefte für Mathematik und Physik **8** (1897), S. 273—277.

[13]) J. E. Littlewood: *The converse of Abel's theorem on power series*, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, **9** (1911), S. 434—448.

[14]) G. H. Hardy and J. E Littlewood: *The relations between Borel's and Cesàro's methods of summation*, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, **11** (1912), S. 1—16.

[15]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood: *Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **41** (1916), S. 36—53.

stelle und beweise. In § 6 werden wir zwar sehen, daß sie mit einem Schlage aus den eben erwähnten Hardy-Littlewoodschen $B \to K$-Sätzen gefolgert werden können; doch sind ihre unabhängig dargestellten Beweise in vieler Beziehung einfacher, so daß sich ihre besondere Darstellung sehr wohl lohnt. — Wir beweisen zunächst den folgenden 5. Satz:

o-E → K-Satz. Eine E_p-summierbare Reihe $\sum a_n$, für die

$$a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ist, muß sogar im gewöhnlichen Sinne konvergieren.

Beweis. Wir beweisen den Satz zunächst für $p = 1$. Dann besagen die Voraussetzungen, daß

a) $$S_n = \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} s_0 - \binom{n}{1} s_1 + \ldots - \binom{n}{n} s_n\right] \to s$$

strebt und daß

b) $$a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ist. Hieraus ist zu folgern, daß auch $s_n \to s$ strebt. Dazu zerlegen wir den Ausdruck rechterhand in

$$S_{2n} - s_n = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\nu=0}^{2n} \binom{2n}{\nu} (s_\nu - s_n)$$

in drei Teile: $T_1 + T_2 + T_3$. Und zwar bedeute T_1 den Teil des Ganzen, der für $\nu = 0$ bis $\nu = m = \left[\frac{n}{2}\right]$ entsteht, T_3 den Teil von $\nu = 2n - m$ bis $\nu = 2n$ und T_2 den verbleibenden mittleren Teil. Wegen b) gibt es — grob abgeschätzt — eine Konstante K_1, so daß stets $s_n < K_1 \sqrt{n}$ ist; also gibt es auch eine Konstante K, so daß für alle n

$$|s_\nu - s_n| < K \cdot \sqrt{n}$$

ist, sofern $0 \leqq \nu \leqq 2n$ bleibt. Daher sind T_1 und T_3 beide

$$< \frac{1}{2^{2n}} K \cdot \sqrt{n} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{2n}{\nu} < \frac{K \cdot \sqrt{n}}{2^{2n}} \cdot (m+1) \cdot \binom{2n}{m},$$

was wegen $m = [\frac{1}{2} n]$ mit wachsendem n gegen 0 strebt[16].

[16] Mit $m = [\frac{1}{2} n]$ ist etwa nach der Stirlingschen Formel — von einer Stelle an sicher

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{m} < \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Übrigens braucht man zu dieser wie auch zu vielen feineren Abschätzungen nicht die Stirlingsche Formel selbst, sondern höchstens die Tatsache, daß die Quotienten

$$z_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}$$

(Fortsetzung der Fußnote 16 auf nächster Seite.)

In T_2 kann, wieder nach b),

$$|s_\nu - s_n| \leqq \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} |n - \nu|$$

gesetzt werden, wenn (ε_n) eine geeignete positive Nullfolge bedeutet: $\varepsilon_n \to 0$. Daher ist

$$|T_2| \leqq \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\nu=m+1}^{2n-m-1}{}' \binom{2n}{\nu} |n - \nu|,$$

$$|T_2| < \varepsilon_n \cdot \frac{1}{2^{2n} \cdot \sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{2n}{}' |n - \nu| \binom{2n}{\nu} = \varepsilon_n \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$ [17])

für alle $n \geqq 1$ zwischen zwei festen positiven Schranken, etwa 1 und 10, liegen, was folgendermaßen *ganz elementar* bewiesen werden kann:

Für jedes ganze $n \geqq 1$ ist

$$e^n = \sum_\nu \frac{n^\nu}{\nu!} = \frac{n^n}{n!}(A_n + B_n),$$

wenn zur Abkürzung

$$A_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots, \quad B_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)} + \ldots$$

gesetzt wird. Hiernach ist $A_n < B_n$. Nun ist für $0 < \alpha_\lambda < 1$ stets

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \ldots (1 - \alpha_k) \geqq 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_k,$$

also für $1 \leqq p \leqq n$

$$A_n > 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{\binom{p}{2}}{n}\right) = p - \frac{1}{n}\binom{p+1}{3} > \frac{p}{6n}(6n - p^2).$$

Für $p = [\sqrt{n}]$ ergibt sich so, daß für alle $n \geqq 1$ stets $A_n > \frac{1}{2}\sqrt{n}$ ist. Ähnlich hat man

$$B_n < 1 + \frac{n}{n+1} + \ldots + \frac{n}{n + \binom{\nu}{2}} + \ldots.$$

Läßt man hier bei den ersten $p = [\sqrt{n}]$ Gliedern im Nenner den Summanden $\binom{\nu}{2}$, bei den folgenden Nennern den Summanden n fort, so folgt, daß

$$B_n < p + 2n\left(\frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \ldots\right) = p + \frac{2n}{p} < \sqrt{n} + \frac{4n}{\sqrt{n}} = 5\sqrt{n}$$

ist. Also ist in der Tat für alle $n \geqq 1$ stets $1 < z_n < 10$. — (Da überdies z_n monoton fällt, so strebt z_n gegen einen Grenzwert $\gamma \geqq 1$, für den das Wallissche Produkt sofort den Wert $\gamma = \sqrt{2\pi}$ liefert).

[17]) Denn es ist

$$\sum_{\nu=0}^{2n}{}' |n - \nu| \binom{2n}{\nu} = 2 \sum_{\nu=0}^{n}{}' (n - \nu) \binom{2n}{\nu} = n \binom{2n}{n}.$$

Da hier der hinter ε_n stehende Ausdruck mit wachsendem n nach der Wallisschen Formel gegen $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ strebt, so muß T_2 und somit auch

$$S_{2n} - s_n \to 0$$

streben. In Verbindung mit der Voraussetzung a) folgt hieraus sofort

$$s_n \to s,$$

was zu beweisen war.

Aus der Richtigkeit des Satzes für $p = 1$ folgt sie nun leicht für beliebige p. Dazu zeigen wir zunächst, daß aus

$$a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

für jedes ganzzahlige p auch

$$a_n^{(p)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

folgt. In der Tat, setzt man $a_n = \frac{\delta_n}{\sqrt{n}}$ (für $n \geqq 1$; $a_0 = \delta_0$), so ist bezüglich

$$a_n' = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \ldots + \binom{n}{n} a_n\right]$$

nur zu zeigen, daß aus $\delta_n \to 0$ auch

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n}\left[\binom{n}{0}\delta_0 + \binom{n}{1}\frac{\delta_1}{\sqrt{1}} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{\delta_n}{\sqrt{n}}\right] \to 0$$

folgt, was nach dem Toeplitzschen Satze[18]) sich sofort ergibt, wenn nur gezeigt wird, daß

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n}\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

beschränkt ist. Zerlegt man aber, genau wie eben, die in der Klammer stehende Summe in drei Teile, so strebt der erste und dritte Teil nach der in Fußnote [16]) gegebenen, ganz groben Abschätzung gegen 0, wenn er mit dem vor der Klammer stehenden Faktor multipliziert wird; und der mittlere Teil ist

$$< \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}n}} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} = \sqrt{2}.$$

Also ist auch $a_n' = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Da aber $a_n^{(p)}$ aus $a_n^{(p-1)}$ durch dieselbe Transformation erhalten wird wie a_n' aus a_n, so folgt durch Wiederholung dieses Schlusses nun für jedes ganze $p > 0$, daß $a_n^{(p)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist, falls $a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist.

[18]) Vgl. Fußnote [7a]).

Ist nun $p > 0$ beliebig und Σa_n eine E_p-summierbare Reihe, so ist $\Sigma a_n^{(p-1)}$ eine E_1-summierbare Reihe und nach I, § 3, Satz 2 dürfen wir $p \geqq 1$ ganzzahlig annehmen. Wegen $a_n^{(p-1)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ folgt nun nach dem zuvor bewiesenen Spezialfall des Satzes aus der E_1-Summierbarkeit der Reihe $\Sigma a_n^{(p-1)}$ deren gewöhnliche Konvergenz. Wir haben also das Ergebnis: Aus der Konvergenz von $\Sigma a_n^{(p)}$ folgt in Verbindung mit $a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ die Konvergenz von $\Sigma a_n^{(p-1)}$. Durch im ganzen p-malige Anwendung dieses Schlusses ergibt sich so schließlich die Konvergenz von Σa_n, die bewiesen werden sollte.

Wesentlich schwieriger ist der Beweis des zugehörigen O-Satzes, der natürlich den vorigen Satz als Spezialfall enthält. Wir formulieren ihn als 6. Satz:

O-$E \to K$-Satz. Eine E_p-summierbare Reihe Σa_n, für die

$$a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ist, muß sogar im gewöhnlichen Sinne konvergieren.

Aus ganz analogen Gründen wie eben genügt es, auch diesen Satz nur für $p = 1$ zu beweisen, also aus den beiden Voraussetzungen

(A) $$\frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} s_0 + \binom{n}{1} s_1 + \ldots + \binom{n}{n} s_n\right] \to s$$

und

(B) $$a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

zu folgern, daß schon $s_n \to s$ strebt.

Setzt man den Beweis ebenso an, wie bei Satz 5, so lehrt er jedenfalls, daß die s_n beschränkt sind: $s_n = O(1)$. Denn der einzige Unterschied ist, daß die ε_n jetzt keine Nullfolge bilden, sondern nur als beschränkt bekannt sind.

Ich werde nun zunächst zeigen, daß der weitere Beweis auf den des folgenden scheinbar sehr einfachen, tatsächlich aber sehr tief gelegenen Satzes zurückgeführt werden kann:

Satz 7. *Aus den beiden Voraussetzungen, daß erstlich — wenigstens für eine gewisse Teilfolge der n —*

(1) $$E_n = \frac{1}{2^{2n}}\left[\binom{2n}{0} s_0 + \binom{2n}{1} s_1 + \ldots + \binom{2n}{2n} s_{2n}\right] \to s$$

strebt, und daß für alle n

(2) $$s_n = O(1)$$

ist, folgt — mindestens für dieselbe Teilfolge der n — auch

$$(3) \qquad E_n' = \frac{1}{2^{4n}}\left[\binom{4n}{0}s_0 + \binom{4n}{2}s_1 + \ldots + \binom{4n}{4n}s_{2n}\right] \to \frac{s}{2}. \quad [19])$$

Aus ihm folgt nämlich Satz 6 sofort so: Wegen (A) gilt (1) ohne Beschränkung für n. Die r-malige Anwendung von Satz 7 lehrt dann, daß für $2^r = k$ auch

$$E_n^{(k)} = \frac{1}{2^{2kn}}\left[\binom{2kn}{0}s_0 + \binom{2kn}{k}s_1 + \ldots + \binom{2kn}{2kn}s_{2n}\right] \to \frac{s}{k}$$

strebt. Ferner ist

$$(4) \qquad E_n^{(k)} - \frac{s_n}{k} = \frac{1}{2^{2kn}}\left[\binom{2kn}{0}(s_0 - s_n) + \binom{2kn}{k}(s_1 - s_n) + \ldots + \binom{2kn}{2kn}(s_{2n} - s_n)\right] + O(\vartheta^n)$$

wobei ϑ ein fester, nur von k, nicht von n abhängender positiver echter Bruch ist[20]). Wegen $a_n = O(n^{-\frac{1}{2}})$ ist nun bei passender Wahl der Konstanten $K > 0$ für alle $n > 0$ und $0 \leqq \nu \leqq 2n$

$$(5) \qquad |s_\nu - s_n| \leqq K \cdot \frac{|n-\nu|}{\sqrt{n}}$$

und also

$$(6) \qquad \left|E_n^{(k)} - \frac{s_n}{k}\right| \leqq K \cdot \frac{1}{2^{2kn}\cdot\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{\nu=0}^{2n}\binom{2kn}{k\nu}|kn - k\nu| + O(\vartheta^n).$$

Nun folgt aber aus der in Fußnote [17]) genannten Formel leicht, daß auch

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2kn}\sqrt{kn}} \sum_{\nu=0}^{2n}\binom{2kn}{k\nu}|kn - k\nu| = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}$$

ist, und es ist daher, wenn wir bei festem k in (6) $n \to \infty$ rücken lassen

$$(8) \qquad \overline{\lim}\,|kE_n^{(k)} - s_n| \leqq \frac{K}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Nun strebt, falls wir Satz 7 als richtig anerkennen, $kE_n^{(k)} \to s$, und es folgt, daß

$$\overline{\lim}\,|s - s_n| \leqq \frac{K}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{2}r}}$$

---

[19]) Oder etwa: *Ist $s_0, s_1, \ldots$ E_1-limitierbar zum Werte s, so ist auch die Folge $s_0, 0, s_1, 0, s_2, 0, s_3, 0, \ldots$ E_1-limitierbar, und zwar zum Werte $\frac{s}{2}$, falls $s_n = O(1)$ ist.* — Daß wir bei diesem Satz 7 $2n$ statt n schreiben, hat mit der Sache nichts zu tun und soll nur die Schreibweise des Beweises etwas erleichtern.

[20]) Sind $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ die k-ten Einheitswurzeln, so liefert die Addition der k Binomialentwicklungen $(1+\varepsilon_\lambda)^{2kn}$ sofort, daß

$$\frac{1}{2^{2kn}}\left[\binom{2kn}{0} + \binom{2kn}{k} + \ldots + \binom{2kn}{2kn}\right] = \frac{1}{k} + O(\vartheta_1^n)$$

mit leicht anzugebendem $0 < \vartheta_1 < 1$ ist.

und also, da r beliebig war, daß $\overline{\lim}\,|s - s_n| = 0$, d. h.

$$\lim s_n = s$$

ist, w. z. b. w.

Damit wäre Satz 6 vollständig auf Satz 7 zurückgeführt. Diesen Satz 7 wollen wir indessen sogleich etwas allgemeiner formulieren, da dies ohne Belastung der Rechnung möglich ist. Wir beweisen so den

Satz 7′. *Wenn für ein $\alpha \geqq 0$ und wenigstens für eine gewisse Teilfolge der n*

$$E_n = o(n^\alpha) \tag{9}$$

und (für alle n)

$$s_n = O(n^\alpha) \tag{10}$$

ist, so folgt daraus auch für dieselbe Teilfolge der n die Beziehung

$$E_n' = o(n^\alpha). \tag{11}$$

Für $\alpha = 0$ geht dieser Satz in den vorigen über, wenn in diesem $s = 0$ gesetzt wird. Aus bekannten Gründen folgt aber aus der Richtigkeit des Satzes 7 für $s = 0$ sofort seine Richtigkeit für beliebige s. [21])

Alles kommt also auf den Beweis des Satzes 7′ hinaus[22]). Dazu

[21]) Denn ersetzt man in dem für $s = 0$ hingeschriebenen Satze 7 s_n durch $(s_n - s)$, was die a_n für $n \geqq 1$ nicht ändert, so ergibt sich sofort seine Richtigkeit für beliebige s.

[22]) Genau wie wir eben aus Satz 7 den Satz 6 gefolgert haben, läßt sich aus Satz 7′ die folgende Verallgemeinerung des Satzes 6 herleiten:

Satz 6′. *Erfüllt eine Reihe Σa_n die beiden Voraussetzungen, daß für ein $\alpha \geqq 0$*

a) *für die E_p-Transformationen $s_n^{(p)}$ ihrer Teilsummen s_n die Abschätzung*

$$s_n^{(p)} = o(n^\alpha),$$

b) *für ihre Glieder a_n die Abschätzung*

$$a_n = O(n^{\alpha - \frac{1}{2}}) \tag{12}$$

gilt, so gilt für die Teilsummen s_n selbst die Abschätzung

$$s_n = o(n^\alpha).$$

Wie vorhin genügt es nämlich, diesen Satz für $p = 1$ zu beweisen. Dann bleibt aber die zur Herleitung von 6 aus 7 benutzte Beziehung (4) ungeändert, während bei (5) und (6) nur immer rechts der Faktor n^α hinzutritt. Statt (8) erhält man also

$$\overline{\lim}\left|\frac{kE_n^{(k)} - s_n}{n^\alpha}\right| \leqq \frac{K}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}, \tag{8′}$$

was $< \varepsilon$ ist, falls das (feste) k groß genug ist. Da nach Satz 7′ bei festem k $kE_n^{(k)} : n^\alpha \to 0$ streben soll, so folgt, daß auch $s_n : n^\alpha \to 0$ strebt, daß also $s_n = o(n^\alpha)$ ist. — Für $\alpha = 0$ geht 6′ in den für $s = 0$ angesetzten Satz 6 über; wie in der vorigen Fußnote betont, genügt dies für den allgemeinen Beweis von Satz 6. — Derselbe Beweisansatz wie zu Satz 5 würde aus den Voraussetzungen a) und b) immerhin schon erkennen lassen, daß $s_n = O(n^\alpha)$ ist.

zeigen wir zunächst, daß sich unter der Voraussetzung (10) die Ausdrücke E_n und E_n' in eine für den jetzigen Zweck bequemere Form bringen lassen:

Setzen wir als *dauernde* Abkürzung $[\frac{1}{2}n] = m$, so ist zunächst wegen (10) nach Fußnote [16]) bei grober Abschätzung

$$(13)\quad \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \binom{2n}{\nu} s_\nu = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\nu=n+m+1}^{2n} \binom{2n}{\nu} s_\nu = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Es kommt also sozusagen nur auf den mittleren Teil des Zählers von E_n an. Für die dort stehenden Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n \pm \nu}$ mit $0 \leqq \nu \leqq m$ gilt aber nach der Stirlingschen Formel

$$(14)\quad n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

gleichmäßig (in ν) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n \pm \nu} &= \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{\nu}{n}\right)^{-n-\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^{-n+\nu-\frac{1}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{\nu^2}{n^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\frac{\nu}{n}}{1-\frac{\nu}{n}}\right)^{-\nu}\cdot\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right].\end{aligned}$$

Wegen $0 \leqq \nu \leqq \frac{1}{2}n$ ist nun

$$\begin{cases} -\log\left(1-\frac{\nu^2}{n^2}\right) = \frac{\nu^2}{n^2} + \frac{2}{3}\vartheta\frac{\nu^4}{n^4} & \text{mit } 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \\ \log\left(1+\frac{\nu}{n}\right) - \log\left(1-\frac{\nu}{n}\right) = 2\left(\frac{\nu}{n} + \frac{1}{2}\vartheta'\frac{\nu^3}{n^3}\right) & \text{mit } 0 \leqq \vartheta' \leqq 1. \end{cases}$$

Folglich ist für $0 \leqq \nu \leqq \frac{1}{2}n$

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n \pm \nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{\nu^2}{n} + \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{n^2} + \eta\frac{\nu^4}{n^3}} \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

mit $|\eta| \leqq 1$. Ersetzt man also unser E_n aus (9) bzw. (1) durch

$$(15)\quad \overline{E}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{\nu^2}{n}} s_{n+\nu},$$

so ist der dabei begangene Fehler

$$= O\left\{n^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{\nu^2}{n}} \left| e^{\frac{1}{2}\frac{\nu^2}{n^2} + \eta\frac{\nu^4}{n^3}} - 1 \right|\right\} + O\left\{n^{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{\nu^2}{n} + \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{n^2} + \eta\frac{\nu^4}{n^3}}\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right.$$

Ersetzt man hier η durch $+1$ und beachtet, daß $|e^x - 1| \leqq |x|\, e^{|x|}$ ist für alle x, sodann, daß für $n \geqq 2$

$$\frac{1}{2}\frac{\nu^2}{n^2} + \frac{\nu^4}{n^3} = \frac{\nu^2}{n}\left(\frac{1}{2n} + \frac{\nu^2}{n^2}\right) \leqq \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{n}$$

ist, so sieht man, daß dieser Fehler

$$= O\left\{\frac{n^\alpha}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{\nu^2}{2n}}\right\} + O\left\{\frac{n^\alpha}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=-m}^{+m} \nu^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{\nu^2}{n}}\right\},$$

$$+ O\left\{\frac{n^\alpha}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=-m}^{+m} \nu^4 e^{-\frac{1}{2}\frac{\nu^2}{n}}\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ist.

Nun gilt aber für beliebige reelle $h \geqq 0$ und $k > 0$ die asymptotische Gleichung

$$\sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-k\frac{\nu^2}{n}} |\nu|^h \simeq \sqrt{\frac{n}{k}}^{h+1} \cdot \Gamma\left(\frac{h+1}{2}\right). \quad (16)$$

[23])

Folglich ist der beim Übergang von E_n zu $\bar{E}_n$ begangene Fehler

$$|E_n - \bar{E}_n| = O(n^{\alpha-1}), \quad (17)$$

so daß von diesen beiden Zahlenfolgen *keine* oder *beide* $= o(n^\alpha)$ sind.

Genau ebenso zeigt man, daß von den beiden Zahlenfolgen E'_n in (11) und

$$\bar{E}'_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-2\frac{\nu^2}{n}} s_{n+\nu} \quad (18)$$

entweder *keine* oder *beide* $= o(n^\alpha)$ sind. Statt des Satzes 7′ genügt es also den folgenden zu beweisen:

Satz 7″. *Wenn* $s_n = O(n^\alpha)$ *ist, und wenn (wenigstens für eine gewisse Teilfolge der* n*)*

$$\bar{E}_n = o(n^\alpha) \quad (19)$$

ist, so ist (mindestens für dieselbe Teilfolge der n*) auch*

$$\bar{E}'_n = o(n^\alpha). \quad (20)$$

---

[23]) Es ist

$$\sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-k\frac{\nu^2}{n}} |\nu|^h \simeq 2 \sum_{\nu=0}^{n} e^{-k\frac{\nu^2}{n}} \cdot \nu^h \simeq 2 \int_0^n e^{-k\frac{x^2}{n}} x^h \, dx = 2\sqrt{\frac{n}{k}}^{h+1} \int_0^{\sqrt{kn}} e^{-x^2} x^h \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{n}{k}}^{h+1} \int_0^{kn} e^{-t} t^{\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}} \, dt \simeq \sqrt{\frac{n}{k}}^{h+1} \cdot \Gamma\left(\frac{h+1}{2}\right).$$

(Das Maximum von $e^{-k\frac{x^2}{n}} \cdot x^h$ liegt bei $x = \sqrt{\frac{hn}{2k}}$, sein Wert ist $= O(\sqrt{n}^{h+1})$ und die Summe differiert vom Integral um höchstens zwei ihrer Glieder.)

Beweis. Beim Übergang von $\overline{E}_n$ zu $\overline{E}'_n$ tritt zu den Gliedern der Summe der Faktor

$$e^{-\frac{\nu^2}{n}} = \sum_{\lambda=0}^{l} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\left(\frac{\nu^2}{n}\right)^\lambda + \frac{(-1)^{l+1}}{(l+1)!}\left(\frac{\nu^2}{n}\right)^{l+1} e^{-\vartheta\frac{\nu^2}{n}} \tag{21}$$

mit $0 < \vartheta < 1$, und folglich ist, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{\nu^2}{n}}\left(\frac{\nu^2}{n}\right)^\lambda s_{n+\nu} = H_n^{(\lambda)} \tag{22}$$

setzen:

$$\overline{E}'_n = \sum_{\lambda=0}^{l} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} H_n^{(\lambda)} + R_n^{(l)}.$$

Hierin ist

$$|R_n^{(l)}| < \frac{K\cdot n^\alpha}{(l+1)!\sqrt{n}} \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{\nu^2}{n}}\left(\frac{\nu^2}{n}\right)^{l+1} < \frac{K\cdot n^\alpha}{(l+1)!\, n^{l+\frac{3}{2}}} \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{\nu^2}{n}}(\nu^2)^{l+1}.$$

Nach (16) ist aber die letzte Summe $\cong n^{l+\frac{3}{2}}\cdot\Gamma(l+\frac{3}{2})$, so daß — bei passender Wahl von K_1 und K_2 —

$$|R_n^{(l)}| < K_1 \frac{\Gamma(l+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+2)}\cdot n^\alpha < \frac{K_2}{\sqrt{l}}\, n^\alpha$$

ist. Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ läßt sich also l so wählen, daß — für alle n —

$$|R_n^{(l)}| < \varepsilon n^\alpha$$

ist. Mit wachsendem l strebt also — und zwar gleichmäßig *für alle* n — der Quotient $|R_n^{(l)}| : n^\alpha \to 0$. Es ist also einerseits für jedes feste n

$$\overline{E}'_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-2\frac{\nu^2}{n}} s_{n+\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} H_n^{(\lambda)}, \tag{23}$$

andererseits konvergiert diese neue Reihe nach gliedweiser Division durch n^α *gleichmäßig für alle* n. Wir werden nun zeigen, daß für jedes feste $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ bei $n \to \infty$

$$\frac{H_n^{(\lambda)}}{n^\alpha} \to 0 \tag{24}$$

strebt, wie dies für $\lambda = 0$ ja gerade unsere Voraussetzung (19) ist. Dann würde aber für $n \to +\infty$ aus (23) in der Tat sofort folgen, daß (20) gilt.

Es bleibt also zu zeigen, daß aus der Gültigkeit von (24) *für* $\lambda = 0$ *die Gültigkeit dieser Beziehung für jedes ganze* $\lambda > 0$ *folgt, falls* $s_n = O(n^\alpha)$ *ist.*

In dem Beweis dieser Behauptungen liegt noch immer eine Hauptschwierigkeit. Wir werden nun (24) sogar für alle $\lambda = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ beweisen:

Aus $s_n = O(n^\alpha)$ folgt zunächst, daß für jedes $\lambda \geqq 0$ auch

$$H_n^{(\lambda)} = O\Big\{\frac{n^\alpha}{\sqrt{n^{2\lambda+1}}} \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{\nu^2}{n}} |\nu|^{2\lambda}\Big\} = O(n^\alpha) \tag{25}$$

ist, — letzteres wegen (16). Die Schwierigkeit liegt im Beweis, daß sogar $H_n^{(\lambda)} = o(n^\alpha)$ ist. Dazu bilden wir (bei festem $\lambda \geqq 0$) bezüglich n die Differenz

$$\Delta H_n^{(\lambda)} = H_n^{(\lambda)} - H_{n+1}^{(\lambda)}.$$

Setzen wir zur Abkürzung vorübergehend

$$\sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{\nu^2}{n}} \nu^{2\lambda} s_{n+\nu} = \Sigma_n,\ ^{24})$$

so ist dies eine Summe, die nach (16) gleich $O(n^{\lambda+\frac{1}{2}+\alpha})$ ist, während ihr erstes und letztes Glied sicher gleich $O(n^{\lambda-\frac{1}{2}+\alpha})$ ist[24a]). Dann ist

$$\Delta H_n^{(\lambda)} = n^{-\lambda-\frac{1}{2}} \cdot \Delta \Sigma_n + \Sigma_{n+1} \cdot \Delta n^{-\lambda-\frac{1}{2}} = O(n^{\alpha-1}) + n^{-\lambda-\frac{1}{2}} \Delta \Sigma_n. \tag{26}$$

Hierin ist nun

$$\Delta \Sigma_n = \sum_{\nu=-m}^{+m} \Delta\left(e^{-\frac{\nu^2}{n}} \nu^{2\lambda} s_{n+\nu}\right) + O(n^{\lambda-\frac{1}{2}+\alpha})$$

$$= \sum_{\nu=-m}^{+m} \left(\Delta e^{-\frac{\nu^2}{n}}\right) \nu^{2\lambda} s_{n+\nu+1} + \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{\nu^2}{n}} \nu^{2\lambda} (s_{n+\nu} - s_{n+\nu+1}) + O(n^{\lambda-\frac{1}{2}+\alpha}).$$

Die erste dieser Summen ist wieder sicher gleich $O(n^{\lambda-\frac{1}{2}+\alpha})$; und sammelt man nun in der letzten Summe die Glieder mit gleichem $s_{n+\nu}$, so wird, da die beiden überstehenden Glieder ebenfalls $O(n^{\lambda-\frac{1}{2}+\alpha})$ sind,

$$\Delta \Sigma_n = \sum_{\nu=-m}^{+m} \left[e^{-\frac{\nu^2}{n}} \nu^{2\lambda} - e^{-\frac{(\nu-1)^2}{n}} (\nu-1)^{2\lambda}\right] s_{n+\nu} + O(n^{\lambda-\frac{1}{2}+\alpha})$$

$$= \sum_{\nu=-m}^{+m} \left[e^{-\frac{\nu^2}{n}} - e^{-\frac{(\nu-1)^2}{n}}\right] \nu^{2\lambda} s_{n+\nu}$$

$$+ \sum_{\nu=-m}^{+m} e^{-\frac{(\nu-1)^2}{n}} \left[\nu^{2\lambda} - (\nu-1)^{2\lambda}\right] s_{n+\nu} + O(n^{\lambda-\frac{1}{2}+\alpha}),$$

also nach einfacher Reduktion

$$\Delta \Sigma_n = -2 \cdot n^\lambda \cdot H_n^{(\lambda+\frac{1}{2})} + 2\lambda \cdot n^\lambda \cdot H_n^{(\lambda-\frac{1}{2})} + O(n^{\lambda-\frac{1}{2}+\alpha}).$$

Und folglich ist nach (26)

$$\Delta H_n^{(\lambda)} = -\frac{2}{\sqrt{n}} H_n^{(\lambda+\frac{1}{2})} + \frac{2\lambda}{\sqrt{n}} H_n^{(\lambda-\frac{1}{2})} + O(n^{\alpha-1}). \tag{27}$$

[24]) Wir schreiben hier und im nächstfolgenden $\nu^{2\lambda}$ statt $(\nu^2)^\lambda$.

[24a]) Nämlich für ein passendes ϑ in $0 < \vartheta < 1$ sogar gleich $O(\vartheta^n)$.

Wegen (25) ist also

$$\Delta H_n^{(\lambda)} = O(n^{\alpha-\frac{1}{2}}), \tag{28}$$

und folglich, indem man in (27) nochmals die Δ-Bildung vornimmt,

$$\Delta^2 H_n^{(\lambda)} = O(n^{\alpha-1}). \tag{29}$$

Da nun nach Voraussetzung für $\lambda = 0$ sogar $H_n^{(0)} = o(n^\alpha)$ ist, so haben wir

$$H_n^{(0)} = o(n^\alpha), \quad \Delta H_n^{(0)} = O(n^{\alpha-\frac{1}{2}}), \quad \Delta^2 H_n^{(0)} = O(n^{\alpha-1}). \tag{30}$$

Wir beweisen nun gleich nachher den folgenden

Hilfssatz. *Erfüllt für ein reelles α die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit den Teilsummen $t_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$ die beiden Voraussetzungen*

a) $b_n = O(n^{\alpha-1})$,

b) $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = o(n^\alpha)$,

so ist

c) $t_n = o(n^{\alpha-\frac{1}{2}})$.[25]

Nehmen wir diesen Satz für den Augenblick als gesichert an, so wird durch ihn die mittelste der Beziehungen (30) sofort zu

$$\Delta H_n^{(0)} = o(n^{\alpha-\frac{1}{2}})$$

verschärft. (Man hat nur das t_n des Hilfssatzes gleich $\Delta H_n^{(0)}$ zu setzen.) Nun lehrt aber die für $\lambda = 0$ angesetzte Beziehung (27), daß auch

$$H_n^{(\frac{1}{2})} = o(n^\alpha)$$

ist. Da aber neben dieser Abschätzung nach (28) und (29) noch

$$\Delta H_n^{(\frac{1}{2})} = O(n^{\alpha-\frac{1}{2}}) \quad \text{und} \quad \Delta^2 H_n^{(\frac{1}{2})} = O(n^{\alpha-1})$$

ist, so wird die mittelste dieser drei Beziehungen durch den Hilfssatz sofort wieder zu

$$\Delta H_n^{(\frac{1}{2})} = o(n^{\alpha-\frac{1}{2}})$$

verschärft, worauf nun die für $\lambda = \frac{1}{2}$ angesetzte Beziehung (27) die weitere Abschätzung

$$H_n^{(1)} = o(n^\alpha)$$

liefert. Durch Wiederholung dieser Schlüsse ergibt sich so insbesondere für jedes ganzzahlige λ

$$H_n^{(\lambda)} = o(n^\alpha),$$

womit (24) in dem behaupteten Umfange bewiesen wäre.

---

[25]) Dieser Hilfssatz — der übrigens für $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ und $t_n = s_n - s$ besonderes Interesse hat — ist Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes in G. H. Hardy and J. E. Littlewood: *Contributions to the arithmetic theory of series*, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, **11** (1912), S. 411–478 (§ 13, Theorem 6).

Hiernach fehlt zur Vollendung aller unserer Beweise nur noch der

Beweis des Hilfssatzes. Es genügt offenbar, diesen Satz für reelle b_n zu beweisen. Wäre nun die Behauptung c) falsch, so wäre für ein passendes $c > 0$ und unendlich viele Indizes r entweder

$$(d_1) \quad t_r > c r^{\alpha-\frac{1}{2}} \qquad \text{oder} \qquad (d_2) \quad t_r < -c r^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Da ein etwaiger Vorzeichenwechsel ohne Belang ist, so brauchen wir nur die erste Möglichkeit weiter zu verfolgen. Wird dann K nach a) so gewählt, daß stets $|b_n| < K n^{\alpha-1}$ ist, so wäre für $\varrho \geqq 1$

$$\begin{aligned} t_{r+\varrho} &> c r^{\alpha-\frac{1}{2}} - K \cdot [(r+1)^{\alpha-1} + \ldots + (r+p)^{\alpha-1}], \\ &> c r^{\alpha-\frac{1}{2}} - K \cdot \varrho \cdot \{r^{\alpha-1} \text{ bzw. } (r+\varrho)^{\alpha-1}\}, \end{aligned}$$

wobei von den letzten Faktoren der erste oder der zweite zu nehmen ist, je nachdem $\alpha \leqq 1$ oder > 1 ist. Also wäre für jedes $p \geqq 1$

$$t_{r+1} + \ldots + t_{r+p} > p c r^{\alpha-\frac{1}{2}} - K \cdot p^2 \{r^{\alpha-1} \text{ bzw. } (r+p)^{\alpha-1}\},$$

$$\frac{t_0 + t_1 + \ldots + t_{r+p}}{(r+p)^\alpha} \cdot \left(1 + \frac{p}{r}\right)^\alpha >$$

$$\frac{t_0 + \ldots + t_r}{r^\alpha} + \frac{p}{\sqrt{r}} \left[c - K \cdot \frac{p}{\sqrt{r}} \left\{ 1 \text{ bzw. } \left(1 + \frac{p}{r}\right)^{\alpha-1} \right\} \right].$$

Wählen wir nun zu jedem der unendlich vielen r, die (d_1) erfüllen, ein $p = p_r$ so, daß dabei $\frac{p_r}{\sqrt{r}}$ gegen einen Grenzwert $\gamma > 0$ strebt, für den auch $c - K\gamma$ noch *positiv* ist, so würde $\frac{p_r}{r} \to 0$ und also die ganze linke Seite der letzten Beziehung nach b) gegen 0 streben, während die rechte Seite einen noch positiven Grenzwert hätte. Also muß die Behauptung c) doch richtig sein.

Mit den nunmehr vollständig bewiesenen beiden $E \to K$-Sätzen wollen wir uns begnügen. Es erübrigt sich wohl fast hinzuzufügen, daß als $K \to E$-Satz der sogenannte *Permanenzsatz* der E-Summierbarkeit anzusehen ist, welcher besagt, daß jede konvergente Reihe eo ipso auch E-summierbar ist (s. I, § 1).

§ 4.

$E \to C$-Sätze.

In I, § 5 sahen wir generell, daß das E- mit dem C-Verfahren insofern unvergleichbar ist, als das Konvergenzfeld keines der beiden ganz in dem des anderen enthalten ist. Es bleibt also die Frage, unter welchen zusätzlichen Bedingungen man von der Summierung nach dem einen auf die durch das andere Verfahren schließen kann. In diesem Paragraphen sollen Sätze gegeben werden, die von der E- auf die C-Summierbarkeit

zu schließen gestatten. Den Schlüssel dazu bietet der folgende Satz 8, der in verwandter Form — nämlich für das Borelsche Verfahren, jedoch nur mit einer o-Voraussetzung — schon von Hardy und Littlewood[26]) ausgesprochen worden ist. Bei diesem Satz wollen wir zur deutlicheren Unterscheidung von der E_p-Transformation der Reihe Σa_n, die nach wie vor mit $\Sigma a_n^{(p)}$ und deren Teilsummen weiter mit $s_n^{(p)}$ bezeichnet werden sollen, setzen

$$a_n = S_n^{(-1)}, \qquad s_n = S_n^{(0)}$$

und allgemein für $p \geqq 0$

$$S_0^{(p-1)} + S_1^{(p-1)} + \ldots + S_n^{(p-1)} = S_n^{(p)}.$$

Die C_p-Transformationen von s_n setzen wir dann

$$= c_n^{(p)} = \frac{S_n^{(p)}}{\binom{n+p}{p}}.$$

Dann lautet der fragliche

Satz 8. *Die Reihe Σa_n erfülle für ein $\alpha \geqq r$ die Bedingung*

$$S_n^{(r-1)} = O(n^{\alpha - \frac{1}{2}});$$

dann folgt aus ihrer E_p-Summierbarkeit zum Werte s, daß

$$S_n^{(r)} = \binom{n+r}{r} s + o(n^\alpha)$$

ist[27]).

Beweis. Nach Voraussetzung ist $E_p\text{-}\lim s_n = s$. Dann ist auch

$$C_r E_p\text{-}\lim s_n = s.$$[28])

Wegen der Vertauschbarkeit der C- und E-Verfahren (vgl. I, § 4) ist nun auch

$$E_p C_r\text{-}\lim s_n = s,$$

d. h. die Folge der Zahlen $\sigma_n = c_n^{(r)} = \dfrac{S_n^{(r)}}{\binom{n+r}{r}}$ ist E_p-limitierbar zum Werte s, so daß

$$E_p\text{-}\lim (\sigma_n - s) = 0$$

ist. Speziell ist also das n-te Glied der E_p-Transformation der Folge $(\sigma_n - s)$ gleich $o(1) = o(n^{\alpha - r})$. Ließe sich nun zeigen, daß

$$\alpha_n = (\sigma_n - s) - (\sigma_{n-1} - s) = \sigma_n - \sigma_{n-1} = O(n^{\alpha - r - \frac{1}{2}})$$

---

[26]) l. c. Fußnote [14]).

[27]) Die Behauptung $S_n^{(r)} = O(n^{\alpha + \frac{1}{2}})$ wäre trivial.

[28]) D. h. die C_r-Transformation der Folge $s_n^{(p)}$ (also der E_p-Transformation der Folge s_n) muß gegen s konvergieren, da nach Voraussetzung schon $s_n^{(p)} \to s$ strebt.

ist, so wären für die Reihe Σa_n mit den Teilsummen $\sigma_n - s$ die Voraussetzungen des Satzes 6′ in Fußnote [22]) erfüllt (mit $\alpha - r$ an Stelle von α), so daß wir auf Grund dieses Satzes sofort auf

$$\sigma_n - s = o(n^{\alpha-r}) \quad \text{oder} \quad S_n^{(r)} = \binom{n+r}{r} s + o(n^\alpha)$$

schließen könnten. Damit wäre schon alles bewiesen. Für die α_n findet man nun in der Tat ganz leicht

$$\begin{aligned}
\alpha_n = \sigma_n - \sigma_{n-1} &= \frac{S_n^{(r)}}{\binom{n+r}{r}} - \frac{S_{n-1}^{(r)}}{\binom{n+r-1}{r}} \\
&= \frac{r!}{(n+r)\dots(n+1)\,n}\left[n S_n^{(r)} - (n+r) S_{n-1}^{(r)}\right] \\
&= \frac{r!}{(n+r)\dots(n+1)\,n}\left[n S_n^{(r-1)} - r S_{n-1}^{(r)}\right] \\
&= O\left\{\frac{1}{n^{r+1}}\left(n \cdot n^{\alpha-\frac{1}{2}} + n^{\alpha+\frac{1}{2}}\right)\right\} = O\left(n^{\alpha-r-\frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

w. z. b. w.

Zusätze. 1. Man bemerkt zunächst noch, daß beim Beweise lediglich benutzt wurde, daß Σa_n eine $C_r E_p$-summierbare Reihe ist. Sie braucht also gar nicht E_p-summierbar zu sein.

Sodann sind die folgenden Spezialfälle erwähnenswert:

2. (Spezialfall $r = \alpha$.) *Ist Σa_n eine E_p- oder wenigstens $C_r E_p$-summierbare Reihe, für die $S_n^{(r-1)} = O(n^{r-\frac{1}{2}})$ ist, so ist sie schon C_r-summierbar* [29]).

3. (Spezialfall $r < \alpha = r + \frac{1}{2}k$; $k > 0$ ganz.) *Ist Σa_n eine E_p- oder wenigstens $C_r E_p$-summierbare Reihe, für die*

$$S_n^{(r-1)} = O\left(n^{r+\frac{1}{2}(k-1)}\right)$$

ist, so ist sie C_{r+k}-summierbar. — Denn aus den Voraussetzungen folgt durch k-malige Anwendung des Satzes 8 zunächst, daß

$$S_n^{(r+k-1)} = O\left(n^{r+k-\frac{1}{2}}\right),$$

woraus nun in Verbindung mit der in den Voraussetzungen liegenden $C_{r+k} E_p$-Summierbarkeit nach Zusatz 2 die C_{r+k}-Summierbarkeit der Reihe folgt.

4. (Spezialfall $k = 1$ des vorigen Zusatzes.) *Ist Σa_n eine E_p- oder wenigstens $C_r E_p$-summierbare Reihe, für die*

$$S_n^{(r-1)} = O(n^r)$$

ist, so ist sie C_{r+1}-summierbar.

[29]) D. h. also: dann ist die E-Transformation überflüssig.

5. (Spezialfall $r = 0$ des letzten Zusatzes.) *Eine E_p-summierbare Reihe Σa_n, für die $a_n = O(1)$ ist, ist schon C_1-summierbar.*

6. (Spezialfall $r = 0$, $k = 2q+1$ des Zusatzes 3.) *Eine E_p-summierbare Reihe, für die $a_n = O(n^q)$ ist für irgendein $q \geqq 0$, ist von einer passenden Ordnung C-summierbar, nämlich spätestens bei der Ordnung $2q+1$.*

7. Hat $\Sigma a_n x^n$ den Radius 1 und ist $\Sigma a_n x^n$ in $+1$ regulär, so ist Σa_n sicher schon E_1-summierbar. Hat $\Sigma a_n x^n$ einen beliebigen positiven Radius und ist $\Sigma a_n x^n$ für ein $p \geqq 0$ wenigstens in dem Kreise

$$\mathfrak{K}_p(1): \quad \left| x - \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1} \right| < \frac{2^p}{2^{p+1} - 1},$$

sowie im Randpunkte $+1$ desselben regulär, so ist Σa_n sicher E_{p+1}-summierbar. (Vgl. § 1 dieser Arbeit und I, § 2.) *Verlangt man also in allen zuletzt formulierten Sätzen statt der E_p-Summierbarkeit von Σa_n, daß die Funktion $\Sigma a_n x^n$ in dem genannten Umfange regulär ist, so bleiben sie a fortiori richtig.*

§ 5.

$C \rightarrow E$-Sätze.

Es erhebt sich nun die umgekehrte Frage, wann aus der C-Summierbarkeit einer Reihe auf ihre E-Summierbarkeit geschlossen werden kann. Auch hier ist G. H. Hardy vorangegangen, der zuerst einen $C \rightarrow B$-Satz bewiesen hat[30]). Wir folgen seinem Beispiele und beweisen den

Satz 9. *Ist Σa_n eine C_1-summierbare Reihe, für die*

$$\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = s + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ist, so ist Σa_n auch E_1-summierbar.

Beweis. Wie bisher bedeutet es keine Einschränkung, wenn wir $s = 0$ annehmen. Dann strebt also nicht nur

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} \rightarrow 0,$$

sondern auch $\sigma_n \sqrt{n} \rightarrow 0$. Ist dann γ der größte der Werte $|\sigma_n|$ und γ_n der größte der Werte $|\sigma_{n+1}|, |\sigma_{n+2}|, \ldots$, so gilt bekanntlich die (Abelsche) Abschätzung

$$\left| \frac{v_0 s_0 + v_1 s_1 + \ldots + v_n s_n}{v_0 + v_1 + \ldots + v_n} \right| \leqq \gamma_p + \frac{\gamma p v_p + 2\gamma_p m v_m}{v_0 + v_1 + \ldots + v_n},$$

[30]) Hardy, G. H.: *Researches in the theory of divergent series and divergent integrals*, The Quarterly Journal of pure and applied mathematics **35** (1904), S. 22–66.

falls $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ beliebige positive Zahlen sind, die bis zum Gliede v_m monoton wachsen, hernach monoton fallen, und falls $p < m < n$ ist. Wählen wir bei festem n speziell $v_\nu = \binom{n}{\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, so kann

$$p = \left[\frac{n}{3}\right], \qquad m = \left[\frac{n}{2}\right]$$

gesetzt werden, und wir erhalten

$$\left|\frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0}s_0 + \binom{n}{1}s_1 + \ldots + \binom{n}{n}s_n\right]\right| < \gamma_p + \frac{1}{2^n}\gamma \cdot p\binom{n}{p} + \frac{2}{2^n}\gamma_p \cdot m\binom{n}{m}.$$

Nun gilt aber für das Maximalglied $\binom{n}{m}$ der Werte $\binom{n}{\nu}$ bekanntlich, daß

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{m} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ist, so daß

$$\frac{2}{2^n}\gamma_p \cdot m\binom{n}{m} < \gamma_p \cdot \sqrt{n} < 3\gamma_p\sqrt{p}$$

ist. Da nun $\gamma_p\sqrt{p} \to 0$ streben sollte, da ferner $p = \left[\frac{n}{3}\right]$ zugleich mit $n \to \infty$ rückt und hierbei $\frac{p}{2^n}\binom{n}{p} \to 0$ rückt, so strebt für $n \to \infty$

$$\frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0}s_0 + \binom{n}{1}s_1 + \ldots + \binom{n}{n}s_n\right] \to 0,$$

was die (auf $s = 0$ spezialisierte) Behauptung ausspricht. Der hiermit bewiesene Satz 9 wäre als $o\text{-}C_1 \to E$-Satz zu bezeichnen, und es läge die Vermutung nahe, daß hier *ein entsprechender O-Satz* gilt. *Das ist aber nicht der Fall*, wie schon aus dem in I, § 5 gegebenen Beispiel einer C_1- aber *nicht* E_p-summierbaren Reihe ersehen werden kann. Für das dortige Beispiel *ist* nämlich, wie man ganz leicht nachrechnet,

$$\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} - s = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

nämlich der Betrag der mit $\sqrt{n}$ multiplizierten linke Seite stets $< \frac{1}{2}$. Trotzdem ist die Reihe, wie dort gezeigt, nicht E_1-summierbar. Ein $O\text{-}C \to E$-Satz der hier zu erwartenden Form besteht also nicht.

Dagegen läßt sich leicht die folgende Verallgemeinerung beweisen:

Satz 10. *Ist Σa_n eine C_p-summierbare Reihe und ist*

$$c_n^{(p)} = \frac{S_n^{(p)}}{\binom{n+p}{p}} = s + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

so ist $c_n^{(p-1)} = \dfrac{S_n^{(p-1)}}{\binom{n+p-1}{p-1}}$ *eine E_1-limitierbare Folge*[31]).

[31]) Bei der vorausgesetzten Geschwindigkeit der Konvergenz der C-Transformation kann also eine Stufe des C-Verfahrens durch das E-Verfahren vertreten werden. — Für $p = 1$ geht Satz 10 natürlich in Satz 9 über.

Vorbemerkungen. 1. Die Behauptung des Satzes kann auch dahin ausgesprochen werden, daß Σa_n eine $E_1 C_{p-1}$-summierbare Reihe ist.

2. Der Satz erfüllt nicht ganz die Erwartungen, die durch die vorangehenden Sätze erweckt worden sind, da er aus der C_p-Summierbarkeit nicht unmittelbar auf die E-Summierbarkeit zurückzuschließen gestattet. Ein solcher Satz wäre in der Tat *falsch*, wie G. H. Hardy für die entsprechende Fragestellung bei der Borelschen Summierung durch ein Beispiel gezeigt hat[32]). Nach dem Hauptsatz des folgenden Paragraphen leistet dies Beispiel die gleichen Dienste auch für die vorliegende Frage.

3. Auch hier gilt natürlich noch weniger wie im Falle $p = 1$ ein entsprechender O-Satz. —

Beweis. Nehmen wir wieder, was keine Einschränkung bedeutet, $s = 0$ an, so besagt die Voraussetzung, daß

$$c_n^{(p)} = S_n^{(p)} : \binom{n+p}{p} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ist. Hieraus folgt, daß

$$S_n^{(p-1)} = \binom{n+p}{p} c_n^{(p)} - \binom{n+p-1}{p} c_{n-1}^{(p)} = \frac{1}{p}\binom{n+p-1}{p-1}\left[(n+p)\, c_n^{(p)} - n c_{n-1}^{(p)}\right]$$

oder

$$c_n^{(p-1)} = S_n^{(p-1)} : \binom{n+p-1}{p-1} = \frac{1}{p}\left[(n+p)\, c_n^{(p)} - n c_{n-1}^{(p)}\right]$$

$$= \frac{p-1}{p}\, c_n^{(p)} + \frac{1}{p}\left[(n+1)\, c_n^{(p)} - n c_{n-1}^{(p)}\right]$$

ist. Das arithmetische Mittel der ersten $(n+1)$ dieser Größen ist also

$$\frac{c_0^{(p-1)} + c_1^{(p-1)} + \ldots + c_n^{(p-1)}}{n+1} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{c_0^{(p)} + c_1^{(p)} + \ldots + c_n^{(p)}}{n+1} + \frac{1}{p}\, c_n^{(p)}\ ^{33})$$

$$= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

weil ja $c_n^{(p)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sein sollte. Nach dem vorweg bewiesenen $C_1 \to E_1$-Satze bilden also in der Tat die Zahlen $c_n^{(p-1)}$, d. h. die C_{p-1}-Transformationen der s_n, eine E_1-limitierbare Folge, w. z. b. w.

§ 6.

Der $E \to B$-Satz.

Satz 11. *Jede von irgendeiner (positiven) Ordnung E-summierbare Reihe ist auch B-summierbar und zwar zum gleichen Werte.*

[32]) l. c. Fußnote [15]).

[33]) Diese elegante Beziehung zwischen den arithmetischen Mitteln der $c_n^{(p-1)}$ und den $c_n^{(p)}$ benutzt schon I. Schur: *Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte*, Mathematische Annalen **74** (1913), S. 447–458. Sie bildet dort den Schlüssel zu seinem schönen Beweise des Äquivalenzsatzes.

Beweis. Es ist — wieder mit $2^p - 1 = q$ —

$$e^{qx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\binom{n}{0} q^n s_0 + \binom{n}{1} q^{n-1} s_1 + \ldots + \binom{n}{n} s_n \right] x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^{(p)}}{n!} ((q+1)x)^n,$$

also

$$e^{-(q+1)x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^{(p)}}{n!} ((q+1)x)^n = e^{-x} \cdot \sum \frac{s_n}{n!} x^n.$$

Strebt nun nach Voraussetzung $s_n^{(p)} \to s$, so ist die Folge der $s_n^{(p)}$ nach dem Permanenzsatz des B-Verfahrens auch B-limitierbar zum Werte s, so daß die linke Seite der letzten Gleichung $\to s$ strebt für $x \to +\infty$. Also tut dies auch die rechte Seite, w. z. b. w.

Bemerkung. Wie schon in § 3 hervorgehoben, sind auf Grund dieses Satzes die $E \to K$-Sätze 5 und 6 des § 3 unmittelbare Folgerungen aus den entsprechenden Hardy-Littlewoodschen $B \to K$-Sätzen. Ebenso ist der $E \to C$-Satz 8 des § 4 eine Folge des entsprechenden $B \to C$-Satzes, den Hardy und Littlewood in ihrer Arbeit[15]) nennen, ohne indessen seinen Beweis auszuführen. Und das gleiche gilt von unseren Zusätzen zu Satz 8. Denn wenn irgendeine Eigenschaft der B-summierbaren Reihen festgestellt ist, so kommt diese nach Satz 11 notwendig auch den E-summierbaren Reihen zu, da diese zu jenen gehören. — Dagegen sind die $C \to E$-Sätze des § 5 natürlich nicht aus den entsprechenden $C \to B$-Sätzen zu erschließen, sondern umgekehrt diese eine Folge jener; denn eine B-summierbare Reihe braucht nicht auch E-summierbar zu sein, wie etwa durch das folgende Beispiel belegt werden kann: Wird

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n, \quad \text{also} \quad s_n = \begin{cases} (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} & \text{für } n = 2k, \\ 0 & \text{für } n = 2k+1 \end{cases}$$

gesetzt $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, so ist die Folge (s_n) wegen $e^{-x} \cdot e^{-x^2} \to 0$ für $x \to +\infty$ gewiß B-limitierbar und zwar zum Werte 0. Wäre nun diese Folge s_n von irgendeiner Ordnung E_p-limitierbar, so müßte nach § 3, Satz 4, für ein passendes $R > 0$

$$\frac{s_n}{R^n} \to 0$$

streben. Es strebt aber ersichtlich für *jedes* $R > 0$

$$\frac{|s_{2k}|}{R^{2k}} = \frac{(2k)!}{k!\, R^{2k}} \to +\infty.$$

§ 7.

Ein $B \to E$-Satz.

Das Ergebnis des vorigen Paragraphen legt die Frage nach einem Kriterium nahe, durch das aus der B-Summierbarkeit einer Reihe rückwärts auf ihre E-Summierbarkeit geschlossen werden kann. Hier gilt z. B. der

Satz 12. *Aus der B-Summierbarkeit einer Reihe Σa_n folgt ihre E_p-Summierbarkeit, d. h. die Konvergenz ihrer E_p-Transformation $\Sigma a_n^{(p)}$, falls*

(a) $$a_n^{(p)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ist.

Beweis. Nach der letzten Identität in § 6 folgt aus

$$B\text{-}\lim s_n = s$$

sofort

$$B\text{-}\lim s_n^{(p)} = s.$$

Hieraus folgt aber nach dem Hardy-Littlewoodschen $O\text{-}B \to K$-Satz (in [15]); vgl. auch die allgemeinen Ausführungen vor Satz 5 in § 3) wegen (a), d. h. wegen

$$s_n^{(p)} - s_{n-1}^{(p)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

sofort die Behauptung: $s_n^{(p)} \to s$.

§ 8.

Summierbarkeit von Potenzreihen auf den Rändern der Kreisbogenpolygone ihrer E-Summierbarkeit.

G. Doetsch hat die Frage behandelt[34]), inwieweit etwas über die B-Summierbarkeit von Potenzreihen $f(x) = \Sigma c_n z^n$ auf dem Rande ihres Borelschen Summabilitätspolygons ausgesagt werden kann. Er fand: Wenn z_1 auf einer (geradlinigen) Seite des Polygons liegt, aber von deren Endpunkten und von dem auf ihr gelegenen singulären Punkt z_0 verschieden ist, so ist $\Sigma c_n z^n$ in z_1 sicher dann BC_r-summierbar, wenn z_0 ein Pol r-ter Ordnung ist. Wie bei allen bisherigen Fragen liegen auch diese Dinge bei der E-Summierbarkeit ähnlich, sind aber einfacher zu beweisen. So gilt hier der folgende Satz, bei dem wir die Bezeichnungen aus I, § 2 wieder aufnehmen:

Satz 13. *Es sei $f(z) = \Sigma c_n z^n$ eine Potenzreihe mit positivem Radius; es sei $\mathfrak{B}_p$ das Kreisbogenpolygon ihrer E_p-Summierbarkeit und*

[34]) Doetsch, G.: *Über die Summabilität von Potenzreihen auf dem Rande des Borelschen Summabilitätspolygons*, Mathematische Annalen **84** (1921), S. 245–251.

es sei $\widehat{ab}$ eine Seite desselben, die in ihrem Inneren zwischen a und b nur den einen singulären Punkt z_0 enthält. Dieser sei ein Pol r-ter Ordnung von $f(z)$. Dann ist $\Sigma c_n z^n$ für jedes z_1 auf $\widehat{ab}$, das von a, b und z_0 verschieden ist, $C_r E_p$-summierbar zum Werte $f(z_1)$.[35])

Der Beweis ist überaus einfach. Die Reihe

$$\sum \binom{n+r-1}{r-1} z^n = \frac{1}{(1-z)^r}$$

ist bekanntlich für $|z| = 1$, $z \neq +1$ noch C_r-summierbar ($r \geqq 1$, ganz). Ihre E_p-Transformation lautet, wie man sofort nachrechnet[36])

$$\frac{1}{(2^p)^r} \sum \binom{n+r-1}{r-1} \left(\frac{z+2^p-1}{2^p}\right)^n,$$

und diese ist also C_r-summierbar, die Potenzreihe für $1/(1-z)^r$ also $C_r E_p$-summierbar für

$$|z+2^p-1| \leqq 2^p, \qquad z \neq +1.$$

Durch Superposition des C_r- auf das E_p-Verfahren sind also die Randpunkte des genannten Kreises (außer $+1$) hinzugewonnen worden.

Die analogen Verhältnisse liegen natürlich bei der Potenzreihe für $\frac{1}{(z-z_1)^r}$ vor: Sie ist auf dem Kreise

$$\left|\frac{z}{z_1} + 2^p - 1\right| = 2^p$$

überall noch $C_r E_p$-summierbar außer in z_1 selbst. Subtrahiert man also von $f(z)$ den Hauptteil der Laurentschen Entwicklung bei z_1, so kann man die Behauptung fast unmittelbar ablesen.

Wichtiger als dieser ziemlich spezielle Satz erscheint der folgende, der eine weitgehende Ergänzung zum Satz 1 (§ 1) bildet:

Satz 14. *Die Potenzreihe $f(z) = \Sigma c_n z^n$ sei in einem Punkte z_1 noch $C_r E_p$-summierbar, dann gelten, wenn s ihr Wert ist, wörtlich die Behauptungen* a) *bis* d) *des Satzes* 1 *in* § 1.

Beweis. Wir setzen, wie in § 1, $c_n z_1^n = a_n$, so daß die E_p-Transformation von $\Sigma c_n z_1^n \equiv \Sigma a_n$, also die Reihe $\Sigma a_n^{(p)} \equiv \Sigma A_n$ als C_r-summierbar vorausgesetzt wird. Daher sind — nach bekannten groben Abschätzungen — die Teilsummen $s_n^{(p)}$ dieser letzten Reihe $= O(n^r)$ und der Teil a) des Beweises von Satz 1 zeigt unmittelbar, daß

$$|s_n| < K \cdot n^r (2q+1)^n$$

---

[35]) Übrigens können r und p bei dieser Behauptung nicht durch kleinere Ordnungen ersetzt werden, falls man sich auf ganzzahlige Ordnungen beschränkt.

[36]) Durch $(r-1)$-malige Differentiation der E_p-Transformation von Σz^n (s. I, § 2, 1. Beispiel).

ist, wenn K eine passende Konstante bedeutet. Hieraus liest man die Richtigkeit der Behauptung a) ab.

Für die beim Beweise der Sätze 3 und 4 in I, § 2 eingeführte Reihe $\psi(t) = \Sigma a_n t^n \equiv \Sigma c_n (z_1 t)^n$ hatte sich dort als E_p-Transformation, die damals mit $\Sigma A_k'$ bezeichnet wurde, ergeben

$$A_k' = \left(\frac{q}{q+1}\right)^k \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} (1-t)^{k-\nu} \binom{q+1}{q}^\nu A_\nu t^\nu,$$

und der einzige Unterschied gegen damals besteht darin, daß jetzt ΣA_n nicht als konvergent, sondern als C_r-summierbar vorausgesetzt wird. Das genügt aber, um auf die Existenz einer Konstanten A zu schließen, so daß stets

$$|A_n| \leqq A \cdot n^r$$

bleibt. Daher ist

$$|A_k'| \leqq A \cdot k^r \cdot \left(\frac{q}{q+1}\right)^k \left[\frac{q+1}{q}|t| + |t-1|\right]^k,$$

und hieraus kann — da der hinzugekommene Faktor k^r nicht stört — wieder genau die Behauptung c) abgelesen werden. Der weitere Beweis des damaligen Satzes 3 (in I, § 2) bleibt nun wörtlich bestehen und liefert die Behauptung b). Um endlich die Behauptung d), also den in unserem Satze enthaltenen Abelschen Grenzwertsatz zu beweisen, haben wir nun, ganz ähnlich wie in § 1 dieser Arbeit, auf

$$\psi(t) = \frac{q+1}{1+qt} \sum A_n \left(\frac{(q+1)t}{1+qt}\right)^n \equiv \frac{q+1}{1+qt} \sum A_n \tau^n$$

statt des klassischen Abelschen Grenzwertsatzes selbst, dessen bekannte, von G. Frobenius, O. Hölder, A. Pringsheim u. a. herrührende Verallgemeinerungen[37]) anzuwenden, nach denen die in § 1 aus der letzten Gleichung gezogenen Schlüsse auch dann richtig sind, wenn ΣA_n nicht als konvergent, sondern nur als C_r-summierbar vorausgesetzt wird. Damit ist unser Satz schon in vollem Umfange bewiesen[38]). Auch die in § 1 als Zusatz 1 ausgesprochene Erweiterung bleibt hier wörtlich bestehen.

Im Zusatz 2 des § 1 war ganz kurz ein AE_p-Verfahren eingeführt worden. Mit seiner Hilfe kann der eben bewiesene Satz auch so ausgesprochen werden, daß die Konvergenzfelder aller $C_r E_p$-Verfahren (bei festem p uud beliebigem r) in dem Konvergenzfeld des AE_p-Verfahrens enthalten sind.

Königsberg, den 30. Dezember 1922.

[37]) Vgl. etwa mein in [6]) genanntes Lehrbuch, S. 462.

[38]) Übrigens ist z_1 notwendig ein Randpunkt des Bereiches $\mathfrak{B}_p$, wenn $r \geqq 1$ ist und $\Sigma c_n z_1^n$ nicht schon $C_{r-1} E_p$-summierbar ist.

(Eingegangen am 20. Januar. 1923.)

Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Einleitung.

Die Eulersche Reihentransformation kann folgendermaßen erklärt werden. Sei

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{1}$$

die gegebene Reihe; sie entsteht aus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{\nu+1}$$

für $z = 1$, oder also auch aus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(\frac{z}{2-z}\right)^{\nu+1} \tag{2}$$

für $z = 1$. Ordnet man diese letzte Reihe formal nach Potenzen von z um, so erhält man:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda z^{\lambda+1}, \tag{3}$$

wobei

$$b_\lambda = \frac{1}{2^{\lambda+1}} \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} a_\nu. \tag{4}$$

Setzt man hier wieder $z = 1$, so entsteht die Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda, \tag{5}$$

die man als die Eulersche Transformierte von (1) bezeichnet.

Wendet man auf die Reihe (5) nochmals die Eulersche Transformation an, so ist das gleichbedeutend damit, daß man in (3) oder also in (2) die Variable z wieder durch $\frac{z}{2-z}$ ersetzt. Aus (2) entsteht dann:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(\frac{z}{4-3z}\right)^{\nu+1}.$$

Fährt man in dieser Weise fort, so erkennt man, daß die p-malige Wiederholung der Eulerschen Transformation auf folgendes hinausläuft: Man ordne die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left[\frac{z}{2^p-(2^p-1)z}\right]^{\nu+1} \tag{6}$$

formal nach Potenzen von z um und setze dann $z=1$. Eine Verallgemeinerung ergibt sich augenscheinlich, indem man in (6) für p nicht nur ganze, sondern beliebige positive Zahlen zuläßt.

Die Eulersche Transformation und ihre soeben erwähnte Verallgemeinerung kann auch auf divergente Reihen angewandt werden und liefert dann eine brauchbare Summationsmethode. Diese hat kürzlich Herr Knopp untersucht[1]), indem er sie in die allgemeine Toeplitzsche Theorie der linearen Mittelbildungen[2]) einbaute. Mir scheint es rechnerisch noch einfacher, die Methode in meine Theorie der summatorischen Folgen[3]) einzubauen, wodurch sich ebenfalls die von Herrn Knopp gewonnenen Sätze ergeben. Dabei läßt sich die Untersuchung von vornherein noch wesentlich allgemeiner gestalten, ohne daß die Beweise an Einfachheit einbüßen. Ich werde im folgenden zunächst dieses allgemeinere Verfahren auseinandersetzen, um erst im letzten Paragraphen die Nutzanwendung auf das Euler-Knoppsche Verfahren zu machen.

§ 2.

Summierungsfunktionen.

Sei

$$F(z)=\sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_\lambda z^{\lambda+1} \tag{7}$$

[1]) K. Knopp: Über das Eulersche Summierungsverfahren, Mathematische Zeitschrift **15** (1922), S. 226–253.

[2]) O. Toeplitz: Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace matematyczno-fizyczne **22** (1911), S. 113–119. Vgl. auch I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik **151** (1921), S. 79–111.

[3]) Vgl. meine Arbeit: Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen, Mathematische Zeitschrift **6** (1920), S. 286–310. Im folgenden wird diese Arbeit mit „Beitrag“ zitiert.

eine Potenzreihe, deren konstantes Glied verschwindet, und deren weitere Koeffizienten den Bedingungen genügen:

$$\gamma_\lambda \geqq 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_\lambda = 1. \tag{9}$$

Jede solche Potenzreihe (deren Konvergenzradius wegen (9) mindestens gleich 1 ist) bezeichnen wir als eine *Summierungsfunktion*. Ist nun die konvergente oder divergente Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{10}$$

gegeben, so bilden wir die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu [F(z)]^{\nu+1} \tag{11}$$

und ordnen sie formal nach Potenzen von z um. In der entstehenden Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda z^{\lambda+1} \tag{12}$$

setzen wir $z = 1$ und bezeichnen die so erhaltene Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda \tag{13}$$

als die *$F(z)$-Transformierte* von (10), d. h. die durch die Summierungsfunktion $F(z)$ gewonnene Reihe.

Setzt man für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$[F(z)]^{\nu+1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_\lambda^{(\nu+1)} z^{\lambda+1}, \tag{14}$$

so daß also mit Rücksicht auf (7), (8), (9)

$$\gamma_\lambda^{(1)} = \gamma_\lambda, \tag{15}$$

$$\gamma_\lambda^{(\nu+1)} \geqq 0, \tag{16}$$

$$\gamma_\lambda^{(\nu+1)} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda < \nu, \tag{17}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_\lambda^{(\nu+1)} = 1 \tag{18}$$

sein wird, so ist

$$b_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \gamma_\lambda^{(\nu+1)} = \sum_{\nu=0}^{\lambda} a_\nu \gamma_\lambda^{(\nu+1)}. \tag{19}$$

Für die Partialsummen der $F(z)$-transformierten Reihe (13) erhält man also den Ausdruck:

$$\sum_{\lambda=0}^{n} b_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\lambda} a_\nu \gamma_\lambda^{(\nu+1)} = \sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \gamma_\lambda^{(\nu+1)} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sum_{\lambda=0}^{n} \gamma_\lambda^{(\nu+1)}.$$

Setzt man daher

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \gamma_\lambda^{(\nu+1)} = \varphi_\nu(n) \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}, \tag{20}$$

so ist wegen (17)

$$\varphi_\nu(n) = 0 \quad \text{für} \quad n < \nu, \tag{21}$$

und man erhält:

$$\sum_{\lambda=0}^{n} b_\lambda = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varphi_\nu(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(n). \tag{22}$$

Die $F(z)$-Transformation läuft also darauf hinaus, daß man an Stelle der ursprünglichen Reihe (10) die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(n) \tag{23}$$

betrachtet und dann $n \to \infty$ wandern läßt.

Man sieht leicht, daß die Funktionenfolge $\varphi_0(n), \varphi_1(n), \varphi_2(n), \ldots$ eine summatorische Folge ist und zwar eine fallende (Beitrag § 1 und § 2). Zunächst ist nämlich $\varphi_\nu(n)$ wegen (20) und (16) stets $\geqq 0$ und mit n monoton wachsend; außerdem ist

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_\nu(n) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_\lambda^{(\nu+1)} = 1.$$

Sodann ist für $|z| < 1$ mit Rücksicht auf (20)

$$\begin{aligned} \frac{[F(z)]^{\nu+1}}{1-z} &= (\gamma_0^{(\nu+1)} z + \gamma_1^{(\nu+1)} z^2 + \gamma_2^{(\nu+1)} z^3 + \ldots)(1 + z + z^2 + \ldots) \\ &= \varphi_\nu(0) z + \varphi_\nu(1) z^2 + \varphi_\nu(2) z^3 + \ldots . \end{aligned}$$

Wenn man in dieser Gleichung ν um eine Einheit vermehrt oder wenn man die Gleichung mit $F(z)$ multipliziert, kommt links beidemal dasselbe; daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\varphi_{\nu+1}(0) z + \varphi_{\nu+1}(1) z^2 + \varphi_{\nu+1}(2) z^3 + \ldots \\ &= (\gamma_0 z + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z^3 + \ldots)(\varphi_\nu(0) z + \varphi_\nu(1) z^2 + \varphi_\nu(2) z^3 + \ldots), \end{aligned}$$

und hieraus wieder für $n \geqq 1$:

$$\varphi_{\nu+1}(n) = \gamma_0 \varphi_\nu(n-1) + \gamma_1 \varphi_\nu(n-2) + \ldots + \gamma_{n-1} \varphi_\nu(0). \tag{24}$$

Da $\varphi_\nu(n)$ mit n monoton wächst, folgt aus (24):

$$\begin{aligned}\varphi_{\nu+1}(n) &\leqq \gamma_0\varphi_\nu(n) + \gamma_1\varphi_\nu(n) + \ldots + \gamma_{n-1}\varphi_\nu(n)\\ &= (\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1})\varphi_\nu(n) \leqq \varphi_\nu(n).\end{aligned}$$

Damit ist aber die Funktionenfolge $\varphi_\nu(n)$ als eine fallende summatorische Folge erkannt, und es folgt (Beitrag Satz 1):

Satz 1. *Die $F(z)$-Transformierte einer konvergenten Reihe ist wieder konvergent und hat denselben Wert.*

§ 3.

Anwendung auf divergente Reihen.

Wenn die $F(z)$-Transformierte einer Reihe R konvergiert und die Summe σ hat, so nennen wir R $F(z)$-summierbar mit der Summe σ. Nach Satz 1 ist jede konvergente Reihe auch $F(z)$-summierbar, und zwar mit der gleichen Summe. Indessen können [zum mindesten für gewisse Summierungsfunktionen $F(z)$], auch divergente Reihen $F(z)$-summierbar sein. Wir wollen jetzt für $F(z)$-summierbare Reihen die wichtigsten Rechenregeln aufstellen. Trivial ist die folgende:

Sind die Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu$ beide $F(z)$-summierbar mit den Summen σ bzw. σ', so ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha a_\nu + \alpha' a'_\nu)$ ebenfalls $F(z)$-summierbar und zwar mit der Summe $\alpha\sigma + \alpha'\sigma'$.

Das beruht ja offenbar darauf, daß in der Reihe (23) die Glieder der ursprünglichen Reihe linear homogen auftreten, und gilt entsprechend für jede Summation mit Hilfe summatorischer Folgen. Wesentlich tiefer liegt die folgende Rechenregel:

Satz 2. *Wenn von den beiden Reihen*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$
$$0 + a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

die erste $F(z)$-summierbar ist, so ist es auch die zweite, und zwar mit derselben Summe.

Nach der in „Beitrag“ S. 298 eingeführten Terminologie ist also die summatorische Folge $\varphi_\nu(n)$ *beständig*. Wir geben für Satz 2 zwei Beweise.

Erster Beweis von Satz 2. Setzt man

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(n) = \Phi(n), \tag{25}$$

$$0\cdot\varphi_0(n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu-1}\varphi_\nu(n) = \Omega(n), \tag{26}$$

wobei zu beachten ist, daß diese Reihen selbstverständlich konvergieren, weil ihre Glieder von $\nu = n+1$ an alle verschwinden, so ist offenbar nur zu zeigen, daß allemal die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \Omega(n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(n) \tag{27}$$

gilt, sobald die Existenz des rechts stehenden Grenzwerts feststeht. Nun folgt aus (24), indem man mit a_ν multipliziert und dann nach ν summiert:

$$\Omega(n) = \gamma_0 \Phi(n-1) + \gamma_1 \Phi(n-2) + \ldots + \gamma_{n-1} \Phi(0). \tag{28}$$

Hieraus kann aber, wenn $\lim_{n\to\infty} \Phi(n) = \sigma$ ist, wegen (8) und (9) durch eine leichte Rechnung, die dem Leser überlassen sei, gefolgert werden, daß auch $\lim_{n\to\infty} \Omega(n) = \sigma$ ist. W. z. b. w.

Zweiter Beweis von Satz 2. Aus der formalen Identität

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu [F(z)]^{\nu+1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda z^{\lambda+1}$$

folgt durch Multiplikation mit $F(z)$:

$$0 \cdot F(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu-1} [F(z)]^{\nu+1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda z^{\lambda+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_\lambda z^{\lambda+1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda z^{\lambda+1}.$$

Da die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ $F(z)$-summierbar sein soll, etwa mit der Summe σ, so ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda = \sigma;$$

da ferner $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_\lambda$ *absolut* konvergiert (alle Glieder sind ja $\geqq 0$), so ist nach einem Satz von Mertens auch die Produktreihe $\sum c_\lambda$ konvergent, und zwar ist[4])

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_\lambda = \sigma \cdot 1 = \sigma.$$

Das besagt aber, die Reihe $0 + a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ ist $F(z)$-summierbar mit der Summe σ. W. z. b. w.

Man könnte nun vermuten, daß auch die Umkehrung von Satz 2 gilt, d. h. daß auch aus der $F(z)$-Summierbarkeit der dortigen zweiten Reihe die der ersten folgt. Das trifft aber nicht allgemein zu. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Summierungsfunktion

$$F(z) = \frac{1}{3} z + \frac{2}{3} z^2$$

[4]) Vgl. etwa A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre I, S. 488 und 582 (Leipzig und Berlin, 1916—1921).

und setzen im Anschluß an den zweiten der obigen Beweise

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(\frac{1}{3} z + \frac{2}{3} z^2\right)^{\nu+1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda z^{\lambda+1},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu-1} \left(\frac{1}{3} z + \frac{2}{3} z^2\right)^{\nu+1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda z^{\lambda+1} \qquad (c_0 = 0).$$

Dann muß nur gezeigt werden, daß man die a_ν so wählen kann, daß die Reihe Σc_λ konvergiert, die Reihe Σb_λ aber nicht. Das wird aber offenbar dadurch erreicht, daß man für $\sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda z^{\lambda+1}$ irgendeine Potenzreihe wählt, die für $z = 1$ konvergiert und für $z = -\frac{1}{2}$ nicht verschwindet, und sodann die a_ν aus der Identität

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu-1} \left(\frac{1}{3} z + \frac{2}{3} z^2\right)^{\nu+1} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda z^{\lambda+1}$$

bestimmt. Alsdann hat nämlich die Funktion

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda z^{\lambda+1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda z^{\lambda+1}}{\frac{1}{3} z + \frac{2}{3} z^2}$$

an der Stelle $z = -\frac{1}{2}$ einen Pol, so daß die links stehende Reihe nur den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$ hat und also für $z = 1$ nicht konvergiert.

Aus diesem Beispiel folgt, daß, wenn die Umkehrbarkeit von Satz 2 erzwungen werden soll, an die Summierungsfunktion $F(z)$ weitere Forderungen gestellt werden müssen. Wir definieren: *Eine Summierungsfunktion $F(z)$ heißt regulär, wenn sie im abgeschlossenen Bereich $|z| \leqq 1$ analytisch ist*[5]) *und außer für $z = 0$ nicht verschwindet.* Dann gilt

Satz 3. *Ist $F(z)$ eine reguläre Summierungsfunktion, und ist von den beiden Reihen in Satz 2 die zweite $F(z)$-summierbar, so ist es auch die erste, und zwar natürlich mit der gleichen Summe.*

Zum Beweis sei γ_k die erste nicht verschwindende unter den Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Dann ist

$$\frac{F(z)}{z^{k+1}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_{k+\lambda} z^\lambda. \tag{29}$$

Da diese Funktion nach Voraussetzung für $|z| \leqq 1$ analytisch und von Null verschieden ist, so ist

$$\frac{z^{k+1}}{F(z)} = 1 : \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_{k+\lambda} z^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \delta_\lambda z^\lambda, \tag{30}$$

[5]) Der Konvergenzradius ist also *größer* als 1.

wo auch diese letzte Reihe für $|z| \leqq 1$ analytisch, also jedenfalls für $z = 1$ noch absolut konvergent ist, und zwar muß offenbar

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \delta_\lambda = 1 : \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_{k+\lambda} = 1 \tag{31}$$

sein. Den weiteren Beweis kann man wieder auf zwei Arten führen analog den zwei Beweisen von Satz 2.

Erste Beweisart. Die Formel (28) besagt soviel wie

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_\lambda z^\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n+1) z^n,$$

oder also, da der erste Faktor links durch z^k teilbar ist,

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_{k+\lambda} z^\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(k+n+1) z^n.$$

Mit Berücksichtigung von (30) folgt hieraus:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n) z^n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \delta_\lambda z^\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(k+n+1) z^n.$$

Daher ist

$$\Phi(n) = \delta_0 \Omega(k+n+1) + \delta_1 \Omega(k+n) + \ldots + \delta_n \Omega(k+1). \tag{32}$$

Hieraus kann aber, wenn $\lim_{n\to\infty} \Omega(n) = \sigma$ ist, weil die Reihe (31) absolut konvergiert und den Wert 1 hat, wieder leicht geschlossen werden, daß auch $\lim_{n\to\infty} \Phi(n) = \sigma$ ist. W. z. b. w.

Zweite Beweisart. Setzt man wieder

$$0 \cdot F(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu-1} [F(z)]^{\nu+1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda z^{\lambda+1} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+2k+1} z^{\lambda+2k+2},$$

so ergibt sich, wenn man durch $F(z)$ dividiert, wegen (30):

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu [F(z)]^{\nu+1} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+2k+1} z^{\lambda+k+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \delta_\lambda z^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda z^{\lambda+1}. \tag{33}$$

Wenn nun die Reihe $0 + a_1 + a_2 + \ldots$ $F(z)$-summierbar ist mit der Summe σ, so ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda - \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+2k+1} = \sigma.$$

Da aber die Reihe (31) absolut konvergiert, so folgt aus (33) wieder mit Hilfe des Mertensschen Satzes:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+2k+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \delta_\lambda = \sigma \cdot 1 = \sigma.$$

Das heißt aber, die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ ist $F(z)$-summierbar mit der Summe σ. W. z. b. w.

Aus den bewiesenen Rechenregeln folgt unmittelbar

Satz 4. *Bei regulären Summierungsfunktionen $F(z)$ bleibt die $F(z)$-Summierbarkeit einer Reihe erhalten, wenn man endlich viele Glieder an beliebigen Stellen hinzufügt oder wegläßt, und zwar ist die neue Reihe mit dem Wert $\sigma \pm c$ summierbar, wenn die alte mit dem Wert σ summierbar ist, und c die Summe der hinzugefügten oder weggelassenen Glieder bedeutet.*

§ 4.

Das Wirkungsfeld der Summierungsfunktionen.

Aus der Definition der Summierungsfunktionen Seite 159 folgt unmittelbar: Sind $F(z)$, $G(z)$ zwei Summierungsfunktionen, so ist auch die daraus zusammengesetzte Funktion

$$F(G(z)) = H(z)$$

eine Summierungsfunktion. Ebenso sieht man, wenn $F(z)$, $G(z)$ reguläre Summierungsfunktionen sind (Definition Seite 163), daß dann das gleiche von $H(z)$ gilt.

Wenn nun die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

$F(z)$-summierbar ist mit der Summe σ, so heißt das, daß die aus der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu [F(z)]^{\nu+1}$$

durch formale Umrechnung entstehende Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda z^{\lambda+1}$$

für $z = 1$ konvergiert und den Wert σ hat. Nach Satz 1 ist dann aber auch die aus der Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda [G(z)]^{\lambda+1}$$

durch Umordnen nach Potenzen von z hervorgehende Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \beta_\lambda z^{\lambda+1}$$

ebenfalls für $z = 1$ konvergent und hat den Wert σ. Offenbar ist aber diese letzte Potenzreihe identisch mit derjenigen, welche aus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu [F(G(z))]^{\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu [H(z)]^{\nu+1}$$

entsteht, wenn man sie nach Potenzen von z umordnet. Damit ist bewiesen

Satz 5. *Sind $F(z)$, $G(z)$ zwei Summierungsfunktionen, so ist auch $F(G(z)) = H(z)$ eine Summierungsfunktion, und wenn eine Reihe $F(z)$-summierbar ist mit der Summe σ, so ist sie auch $H(z)$-summierbar mit der Summe σ.*

Man kann das auch so ausdrücken, daß das Wirkungsfeld der zusammengesetzten Summierungsfunktion $H(z) = F(G(z))$ das Wirkungsfeld der Summierungsfunktion $F(z)$ umfaßt. Unter dem Wirkungsfeld einer Summierungsfunktion $F(z)$ wird dabei die Gesamtheit der Reihen verstanden, die $F(z)$-summierbar sind.

Für die Größe des Wirkungsfeldes aller Summierungsfunktionen liefert der folgende Satz eine Art oberer Schranke:

Satz 6. *Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ kann nur dann $F(z)$-summierbar sein, und zwar mit der Summe σ, wenn die Potenzreihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^{\nu+1}$$

einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat, wenn ferner die durch sie definierte Funktion sich längs der reellen positiven Achse mindestens im Intervall $0 \leqq w < 1$ analytisch fortsetzen läßt und für $w \to 1$ dem Grenzwert σ zustrebt.

Beweis. Wir setzen, wenn wieder γ_k die erste nicht verschwindende der Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ist,

$$F(z) \equiv \gamma_k z^{k+1} + \gamma_{k+1} z^{k+2} + \ldots = w. \tag{34}$$

Dann ergibt sich durch Funktionsumkehrung:

$$z = \delta_1 \zeta + \delta_2 \zeta^2 + \delta_3 \zeta^3 + \ldots, \quad \text{wobei} \quad \zeta = w^{\frac{1}{k+1}}. \tag{35}$$

Diese Reihe ist für hinreichend kleine $|\zeta|$, etwa für $|\zeta| \leq \varrho$, absolut konvergent und absolut kleiner als 1. Nun entsteht durch formale Umrechnung der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^{(k+1)(\nu+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^{\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (\gamma_k z^{k+1} + \gamma_{k+1} z^{k+2} + \ldots)^{\nu+1}$$

die neue Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda z^{\lambda+1},$$

die nach Voraussetzung für $z=1$, also erst recht für $|z|<1$ konvergiert. Setzt man hier für z die Reihe (35) ein, so entsteht

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda (\delta_1 \zeta + \delta_2 \zeta^2 + \ldots)^{\lambda+1}.$$

Diese Reihe konvergiert für $|\zeta| \leqq \varrho$ gleichmäßig und läßt sich daher nach Potenzen von ζ umordnen. Die neue Reihe, die dann ebenfalls für $|\zeta| \leqq \varrho$ konvergiert, muß aber mit der ursprünglichen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^{(k+1)(\nu+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^{\nu+1}$$

offenbar identisch sein; diese hat also einen von Null verschiedenen Konvergenzradius. Damit ist der erste Teil von Satz 6 bewiesen.

Wenn nun z auf der reellen Achse von 0 nach 1 wandert, so tut w nach (34) dasselbe, und zwar ist

$$\frac{dw}{dz} > 0 \quad \text{für} \quad 0 < z < 1.$$

Durch Funktionsumkehrung folgt also aus (34):

$$z = \Phi(w), \tag{36}$$

wo $\Phi(w)$ im Intervall $0 \leqq w \leqq 1$ analytisch und absolut kleiner als 1 ist, aber für $w \to 1$ ebenfalls gegen 1 wandert. Daher kann man ein das Intervall $0 \leqq w \leqq 1$ enthaltendes Gebiet G angeben, in welchem $\Phi(w)$ ebenfalls analytisch und absolut kleiner als 1 ist[6]).

Für hinreichend kleine positive w ist nun

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^{\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu [F(z)]^{\nu+1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda z^{\lambda+1},$$

also nach (36)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^{\nu+1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda [\Phi(w)]^{\lambda+1}. \tag{37}$$

In jedem abgeschlossenen Teilbereich des Gebietes G ist das Maximum von $|\Phi(w)|$ kleiner als 1, und daher die rechte Seite von (37) gleichmäßig konvergent. Sie stellt daher die analytische Fortsetzung der linken Seite vor. Geht man zur Grenze $w \to 1$ über, so geht auch $\Phi(w) \to 1$

[6]) Dazu beachte man, daß ein Gebiet nach dem üblichen Sprachgebrauch bloß aus *inneren* Punkten besteht.

und nach dem Abelschen Stetigkeitssatz nähert sich dabei die rechte Seite von (37) dem Wert σ der nach Voraussetzung konvergenten Reihe $\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda$. Damit ist Satz 6 vollständig bewiesen.

Aus Satz 6 folgt auch, *daß, wenn $F(z)$, $G(z)$ zwei Summierungsfunktionen sind, und wenn eine Reihe sowohl $F(z)$-summierbar als auch $G(z)$-summierbar ist, sie es beidemal mit derselben Summe ist.*

§ 5.

Der Summierungsbereich für Potenzreihen.

Sei

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^{\nu+1} \tag{38}$$

ein Funktionselement, dessen analytische Fortsetzung im Mittag-Lefflerschen Stern wir mit $\psi(w)$ bezeichnen. Wir fragen, für welche Werte von w die Reihe (38) $F(z)$-summierbar ist. Nach Satz 6 können es nur solche w sein, die dem Stern angehören, wozu allenfalls die (singulären) Eckpunkte des Sternes kommen.

Wenn nun für ein bestimmtes $w = w_0$ die Reihe (38) $F(z)$-summierbar ist, so muß die für hinreichend kleine $|z|$ durch die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w_0^{\nu+1} [F(z)]^{\nu+1} \tag{39}$$

definierte Funktion für $|z| < 1$ analytisch sein; das ist aber die Funktion $\psi(w_0 F(z))$. Wenn umgekehrt $\psi(w_0 F(z))$ sogar für $|z| \leqq 1$ analytisch ist, so wird sich die Reihe (39) nach Potenzen von z umordnen lassen, und die entstehende Reihe wird für $z = 1$ noch konvergieren, so daß die Reihe (38) für $w = w_0$ also $F(z)$-summierbar ist. Damit ist bewiesen:

Satz 7. *Die durch das Funktionselement*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^{\nu+1} \tag{A}$$

definierte Funktion werde in ihrem Mittag-Lefflerschen Stern mit $\psi(w)$ bezeichnet. Dann ist die Reihe (A) *für einen Wert $w = w_0$ des Sternes sicher $F(z)$-summierbar mit der Summe $\psi(w_0)$, wenn $\psi(w_0 F(z))$ für $|z| \leqq 1$ analytisch ist; die Reihe ist dagegen nicht $F(z)$-summierbar, wenn $\psi(w_0 F(z))$ für $|z| < 1$ nicht überall analytisch ist.*

Zweifelhaft bleibt hiernach nur der Fall, daß $\psi(w_0 F(z))$ zwar für $|z| < 1$, nicht aber für $|z| = 1$ überall analytisch ist.

Wegen Satz 6 könnte man in Analogie zur Borelschen exponentiellen Summation vermuten, daß, wenn die Reihe (38) an einer Stelle w_0 des Sternes $F(z)$-summierbar ist, sie es für alle Stellen w der Form

$$w = \vartheta w_0 \qquad (0 \leqq \vartheta < 1)$$

ebenfalls ist. Daß das aber in Wahrheit nicht allgemein zutrifft, lehrt z. B. die Summierungsfunktion

$$F(z) = \frac{e^{(\pi+\varepsilon)z} - 1}{e^{\pi \cdot z} - 1},$$

wobei ε eine kleine positive Zahl ist. Denn für sie ist die geometrische Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} w^{\nu \cdot 1}$, wie man leicht aus Satz 7 erkennt, an der Stelle $w = 1 - e^{\pi}$ summierbar, an der Stelle $w = \frac{1}{2}(1 - e^{\pi})$ aber nicht (wenigstens, wenn ε genügend klein).

Um dem soeben dargelegten Übelstand zu entgehen, machen wir von jetzt an über die Summierungsfunktion $F(z)$ die

Voraussetzung A. *Durch die Gleichung*

$$F(z) = \frac{1}{W} \tag{40}$$

soll die Kreislinie $z = 1$ *auf eine Jordankurve* J *der* W*-Ebene abgebildet werden, die von jedem vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahl nur in einem Punkt getroffen wird. Außerdem soll das Kreisinnere* $z < 1$ *schlicht auf das Äußere von* J *abgebildet werden.*

Nunmehr gilt in der Tat der

Satz 8. *Wenn die Summierungsfunktion* $F(z)$ *die Voraussetzung* A *erfüllt, und wenn die Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^{\nu \cdot 1}$$

für $w = w_0$ $F(z)$*-summierbar ist, so ist sie es auch für jedes* w *der Form*

$$w = \vartheta w_0, \quad \text{wobei} \quad 0 \leqq \vartheta < 1 \quad \text{ist.}$$

Denn wenn $\psi(w)$ wieder die Bedeutung wie in Satz 7 hat, so ist nach Annahme die Funktion $\psi(w_0 F(z))$ für $|z| < 1$ analytisch, d. h. es ist $\psi\left(\frac{w_0}{W}\right)$ analytisch, wenn W außerhalb J liegt. Daher ist $\psi\left(\frac{\vartheta w_0}{W}\right)$ analytisch, wenn $\frac{W}{\vartheta}$ außerhalb J liegt. Infolge der in Voraussetzung A geforderten Gestalt von J ist das aber gewiß der Fall, wenn W außerhalb oder auf J liegt, also wenn $|z| \leqq 1$ ist. Daher ist

$$\psi\left(\frac{\vartheta w_0}{W}\right) = \psi(\vartheta w_0 F(z))$$

für $|z| \leqq 1$ analytisch, also nach Satz 7 die Reihe für $w = \vartheta w_0$ $F(z)$-summierbar. W. z. b. w.

Nunmehr ist es leicht, den Summierungsbereich für eine Potenzreihe anzugeben. Sei

$$z = \Phi(W) \tag{41}$$

die Umkehrungsfunktion von (40); sie ist für alle W außerhalb J analytisch. Die Kurve $|\Phi(W)| = 1$ ist die Jordankurve J; offenbar geht sie durch den Punkt $W = 1$ und enthält das Kreisgebiet $|W| < 1$ ganz im Innern, weil ja für $z = 1$ auch $W = 1$ und für $|z| < 1$ stets $|W| > 1$ sein muß.

Ist nun a eine Ecke des Mittag-Lefflerschen Sternes von $\psi(w)$, so konstruiere man die Kurve J_a mit der Gleichung

$$\left|\Phi\left(\frac{W}{a}\right)\right| = 1;$$

sie ist zu J ähnlich, geht durch den Punkt $W = a$ und enthält das Kreisgebiet $|W| < |a|$ ganz im Innern. Macht man diese Konstruktion für alle Ecken des Sternes, so haben die Innengebiete der Kurven J_a einen Durchschnitt D, der mindestens aus dem Innern des Konvergenzkreises der Reihe

$$\psi(W) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu W^{\nu+1}$$

besteht und der andererseits ganz dem Mittag-Lefflerschen Stern von $\psi(W)$ angehört. Ebenso haben die Außengebiete aller Kurven J_a eine Vereinigungspunktmenge V. Mit diesen Begriffsbildungen beweisen wir jetzt

Satz 9. *Die Voraussetzung* A *sei erfüllt. In den Punkten von* D *ist dann die Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu W^{\nu+1}$$

$F(z)$*-summierbar, in den Punkten von* V *ist sie nicht* $F(z)$*-summierbar.*

Wenn $W = w_0$ ein Punkt von D ist, so liegt w_0 innerhalb einer jeden Kurve J_a, und folglich liegen die Punkte $\frac{w_0}{a}$ innerhalb J. Wegen der in Voraussetzung A geforderten Gestalt von J gilt das erst recht von den Punkten $\frac{w_0}{a'}$, wo a' auf einem Randstrahl des Sternes liegt (d. h. $a' = \lambda a$, $\lambda \geqq 1$). Ist also W ein Punkt außerhalb oder auf J, so ist $\frac{w_0}{a'} \neq W$, also $\frac{w_0}{W} \neq a'$. Somit ist $\frac{w_0}{W}$ kein Punkt auf einem Randstrahl des Sternes, sondern also ein innerer Punkt des Sternes. Also ist $\psi\left(\frac{w_0}{W}\right)$ für alle W außerhalb und

auf J analytisch, d. h. $\psi(w_0 F(z))$ ist analytisch für $|z| \leqq 1$, woraus nach Satz 7 die $F(z)$-Summierbarkeit folgt.

Wenn dagegen w_0 in V liegt, so liegt w_0 außerhalb von mindestens einer Kurve J_a. Dann ist aber $\frac{w_0}{a} = W_0$ ein Punkt außerhalb J; ihm entspricht vermöge (40) oder (41) ein Punkt z_0 im Innern des Einheitskreises, und es ist

$$\psi(w_0 F(z)) = \psi\left(\frac{w_0}{W}\right)$$

für $z = z_0$, d. h. für $W = W_0$ singulär $\left(\text{weil ja } \frac{w_0}{W_0} \text{ der singuläre Punkt } a \text{ ist}\right)$. Die Funktion $\psi(w_0 F(z))$ hat also im Innern des Einheitskreises die singuläre Stelle $z = z_0$, so daß nach Satz 7 die Reihe nicht $F(z)$-summierbar sein kann.

§ 6.

Anwendung auf das Euler-Knoppsche Verfahren.

Die Funktion

$$F_k(z) = \frac{z}{k-(k-1)z} = \frac{1}{k} z + \frac{k-1}{k^2} z^2 + \frac{(k-1)^2}{k^3} z^3 + \dots$$

ist für $k > 1$ offenbar eine Summierungsfunktion. Setzt man $k = 2^p$, so entsteht genau das in der Einleitung erwähnte Euler-Knoppsche Summierungsverfahren.

Offenbar ist $F_k(z)$ sogar eine *reguläre* Summierungsfunktion (Definition S. 163), so daß nach den Sätzen des § 3 sofort die gewöhnlichen auch von Herrn Knopp bewiesenen Rechenregeln gelten. Auch die übrigen Resultate des Herrn Knopp lassen sich leicht aus unseren allgemeineren Sätzen ablesen. So folgt aus der sofort zu bestätigenden Identität

$$F_k(F_l(z)) = F_{kl}(z)$$

nach Satz 5, daß das Wirkungsfeld von $F_{kl}(z)$ das von $F_k(z)$ umfaßt, d. h. das Wirkungsfeld von $F_k(z)$ ist mit dem Index k monoton wachsend, wie auch Herr Knopp erkannt hat (a. a. O. S. 247).

Setzt man analog zu (40)

$$F_k(z) \equiv \frac{z}{k-(k-1)z} = \frac{1}{W}, \tag{40a}$$

so erhält man durch Auflösung nach z analog zu (41):

$$z = \Phi(W) = \frac{k}{W+k-1}. \tag{41a}$$

Die Voraussetzung A (S. 159) ist erfüllt, und die Jordankurve J ist der Kreis

$$|W + k - 1| = k.$$

Ist nun

$$\psi(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^{\nu+1}$$

für genügend kleine $|w|$ konvergent, und ist a eine Ecke des Mittag-Lefflerschen Sternes von $\psi(w)$, so konstruiere man den Kreis

$$\left|\Phi\left(\frac{W}{a}\right)\right| = 1, \quad \text{also} \quad \left|\frac{W}{a} + k - 1\right| = k.$$

Macht man diese Konstruktion für jede Ecke a des Sternes, so bilden die Punkte des Durchschnitts D aller Kreisinnengebiete nach Satz 9 einen Bereich, in dem die Reihe summierbar ist; in den Punkten, die außerhalb von mindestens einem der Kreise liegen, ist sie dagegen nicht summierbar. Dieser Doppelsatz ist ebenfalls von Herrn Knopp, aber auf ganz andere Art, bewiesen worden (a. a. O. S. 239 ff.), die erste Hälfte auch schon vorher von Herrn Rademacher[7]).

[7]) H. Rademacher, Über den Konvergenzbereich der Eulerschen Reihentransformation, Sitzungsber. d. Berl. Math. Gesellschaft **21** (1921), S. 16–24.

(Eingegangen am 18. Februar 1923.)

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Soeben erschien:

Vorlesungen über Differentialgeometrie

und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie

Von

Wilhelm Blaschke

Professor der Mathematik an der Universität Hamburg

II.

Affine Differentialgeometrie

Bearbeitet von

Kurt Reidemeister

Professor der Mathematik an der Universität Wien

Erste und zweite Auflage

Mit 40 Textfiguren. (IX, 259 S.) — GZ. 8,5; geb. GZ. 10,5

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band VII.)

Soeben erschien:

Entwicklungsgeschichte der modernen Physik

Zugleich eine Übersicht ihrer Tatsachen, Gesetze und Theorien

von

Felix Auerbach

Mit 115 Abbildungen. (VIII, 344 S.) GZ. 8; gebunden GZ. 10

Soeben erschien:

Konstanten der Atomphysik

Herausgegeben von

Dr. Walther A. Roth
Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig

und

Dr. Karl Scheel
Professor an der Physik.-Techn. Reichsanstalt in Charlottenburg

Unter besonderer Mitwirkung von

Dr. E. Regener
Professor an der Technischen Hochschule in Stuttgart

(II, 114 S.)

Gebunden GZ. 8

Sonderdruck aus der soeben erschienenen 5. Aufl. Landolt-Börnstein-Roth-Scheel: Physikalisch-chemische Tabellen

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

L. Borchardt, Gegen die Zahlenmystik an der großen Pyramide bei Gise. Vortrag gehalten in der Vorderasiatisch-ägyptischen Gesellschaft zu Berlin am 1. Februar 1922. Mit 6 Abbildungen. 40 S. 8°. 1923. Behrend & Co., Berlin.

Christmann-Baer, Grundzüge der Kinematik. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 164 Textabbildungen. 138 S. 1923. Julius Springer, Berlin.

V. Fischer, Eine Darstellung des Nernstschen Wärmetheorems. Erster Teil. 24 S. 8°. 1923. Zweiter Teil. Verallgemeinerung des Theorems. 44 S. 8°. 1923. Selbstverlag des Verfassers, Frankfurt a. M.-Süd.

J. Fritsche, Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzengleichungen. 90 S. 1923. Julius Springer, Berlin.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 152, Heft 1/2, ausgegeben am 12. Oktober 1922. 123 S. 4°. Heft 3/4, ausgegeben am 20. April 1923. 116 S. 4°. Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig.

H. Lorenz, Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik. 176 S. 1923. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin.

H. Oberth, Die Rakete zu den Planetenräumen. Mit 2 Tafeln und 58 Textabbildungen. 92 S. 8°. 1923. R. Oldenbourg, München und Berlin.

P. Pringsheim, Fluoreszenz und Phosphoreszenz im Lichte der neueren Atomtheorie. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 33 Abbildungen, 228 S. 8°. 1923. Verlag Julius Springer, Berlin.

E. Study, Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung. Erster Teil. (Die wissenschaftlichen Einzeldarstellungen aus der Naturwissenschaft und der Technik, Bd. 71). 208 S. 8°. 1923. Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

L. Wittgenstein, Logisch-philosophische Abhandlung. Mit einem Vorwort von B. Russell. Sonderdruck aus den Annalen der Naturphilosophie. Vierzehnter Band. 127 S. 8°. 1921. Verlag „Unesma", G.m.b.H., Leipzig.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes.

Von

Robert Remak in Berlin.

(Zweiter Teil.)*)

Zweites Kapitel.

Das zweite Kapitel bringt den Beweis des Minkowskischen Satzes für $n = 3$. § 1 führt die Behauptung zurück auf eine andere über quadratische Formen, die in § 2 auf eine spezielle Gestalt gebracht wird. Mit Hilfe eines Gaußschen Satzes über ternäre quadratische Formen wird der Minkowskische Satz in § 3 mit einer schlechteren Konstanten bewiesen. Während bis hierher aus dem ersten Kapitel nur die in dessen beiden ersten Paragraphen behandelte Reduktion der quadratischen Formen benutzt wird, wird in § 4 mit Hilfe der gesamten Ergebnisse des ersten Kapitels der Minkowskische Satz für $n = 3$ mit seiner besten Konstanten bewiesen.

§ 1.

(3) lautet für $n = 3$

$$|\prod_{\varkappa}(y_\varkappa - \eta_\varkappa)| \leqq \frac{|D|}{8}. \tag{188}$$

Ist die Behauptung (188) für irgendein System $a_{\varkappa\lambda}$ und alle möglichen $\eta_\varkappa$ bewiesen, und multipliziert man $a_{\varkappa\lambda}$ mit einem Faktor $c_\varkappa$, so ist die Determinante

$$|c_\varkappa a_{\varkappa\lambda}| = c_1 c_2 c_3 \cdot D,$$

(188) erhält also auf beiden Seiten gleichzeitig denselben Faktor $c_1 c_2 c_3$, bleibt also richtig. Die $c_\varkappa \eta_\varkappa$ durchlaufen gleichzeitig mit den $\eta_\varkappa$ alle reellen Zahlen. Es genügt also, den Beweis für die mit passend gewählten Faktoren $c_\varkappa$ multiplizierten $a_{\varkappa\lambda}$ zu führen.

*) Vgl. d. Zeitschrift **17**, S. 1–34.

Es sei

$$x_\lambda = \sum_\nu b_{\lambda\nu} x'_\nu, \tag{189}$$

wo die $b_{\lambda\nu}$ ganze Zahlen und die Determinante

$$|b_{\lambda\nu}| = \pm 1. \tag{190}$$

Dann wird

$$y_\varkappa = \sum_\nu a'_{\varkappa\nu} x'_\nu.$$

Hierin ist zur Abkürzung

$$\sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} b_{\lambda\nu} = a'_{\varkappa\nu}$$

gesetzt. Da wegen (190) die Gleichungen (189) ganzzahlig nach x'_λ auflösbar, so ist das System $a'_{\varkappa\nu}$ dem System $a_{\varkappa\lambda}$ völlig gleichberechtigt und es genügt, (188) für irgendein gestrichenes System zu beweisen.

Es ist ferner nach dem Satze vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\prod_\varkappa c_\varkappa^2 (y_\varkappa - \eta_\varkappa)^2 \leqq \frac{1}{27} \Big(\sum_\varkappa c_\varkappa^2 (y_\varkappa - \eta_\varkappa)^2 \Big)^3. \tag{191}$$

Es genügt also, um (188) zu beweisen, wenn man zeigt

$$\Big(\sum_\varkappa c_\varkappa^2 (y_\varkappa - \eta_\varkappa)^2 \Big)^3 \leqq \frac{27}{64} D^2 c_1^2 c_2^2 c_3^2. \tag{192}$$

(192) wird sich aber nicht mehr für alle beliebigen $c_\varkappa$, sondern nur noch für geeignete beweisen lassen. Wegen (2) kann man die linearen Gleichungen

$$\sum_\nu a_{\varkappa\lambda} \xi_\lambda = \eta_\varkappa$$

nach ξ_λ auflösen. Dann wird

$$\sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} (x_\lambda - \xi_\lambda) = y_\varkappa - \eta_\varkappa. \tag{193}$$

Setzt man

$$A_{\lambda\nu} = \sum_\varkappa c_\varkappa^2 a_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\nu}$$

und

$$Q(x_\lambda) = \sum_\varkappa c_\varkappa^2 y_\varkappa^2 = \sum_{\lambda,\nu} A_{\lambda\nu} x_\lambda x_\nu,$$

so wird die Determinante $D(Q)$ der quadratischen Form

$$D(Q) = |A_{\lambda\nu}| = D^2 c_1^2 c_2^2 c_3^2$$

und (192) läßt sich mit Rücksicht auf (193) schreiben

$$Q(x_\lambda - \xi_\lambda) \leqq \frac{3}{4} \sqrt[3]{D(Q)}. \tag{194}$$

Für das binäre Problem lautet (3)

$$\prod_{\varkappa} |y_\varkappa - \eta_\varkappa| \leqq \frac{D}{4}. \tag{195}$$

Dies ist genau der Minkowskische Satz. In (191), (192), (194) tritt überall der Exponent 2 an die Stelle von 3 und die drei Koeffizienten

$$\frac{1}{27}, \quad \frac{27}{64}, \quad \frac{3}{4}$$

sind bzw. zu ersetzen durch

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \tag{196}$$

§ 2.

Es soll nun über die $c_\varkappa$ und über eine Substitution (189) so verfügt werden, daß, wenn

$$A'_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa} c_\varkappa^2 \, a'_{\varkappa\alpha} \, a'_{\varkappa\beta}$$

ist,

$$A'_{\alpha\alpha} = 1 \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

und

$$Q'(x'_\lambda) \geqq 1$$

wird für alle Wertetripel x'_λ, die nicht sämtlich 0 sind. Es seien zunächst die c_λ irgendwie willkürlich festgesetzt. Diese quadratische Form besitzt für ganzzahlige x_λ, die nicht sämtlich 0, ein positives Minimum, das für

$$x_\lambda = X_\lambda^{(\mu)} \qquad (\mu = 1, \ldots, \mathsf{M}).$$

angenommen werde. Zwei Wertetripel entgegengesetzt gleicher Zahlen $x_\lambda = -x'_\lambda$ sollen nicht als wesentlich verschieden angesehen werden. Es sei

$$\mathsf{M} \leqq 2. \tag{197}$$

Man versehe die $c_\varkappa$ mit einem gemeinsamen Proportionalitätsfaktor, so daß

$$Q(X_\lambda^{(\mu)}) = 1 \tag{198}$$

wird. Es sei

$$Y_\varkappa^{(\mu)} = \sum_{\lambda} a_{\varkappa\lambda} \, X_\lambda^{(\mu)}. \tag{199}$$

Dann wird

$$1 = Q(X_\lambda^{(\mu)}) = \sum_{\varkappa} c_\varkappa^2 \, Y_\varkappa^{(\mu)\,2}.$$

Die Gleichung

$$\sum_{\varkappa} \gamma_\varkappa \, Y_\varkappa^{(\mu)\,2} = 0 \tag{200}$$

hat, solange (197) gilt, sicher eine von $\gamma_\varkappa = 0$ verschiedene Lösung. Man setze

$$q(x_\lambda) = \sum_\varkappa' \gamma_\varkappa y_\varkappa^2$$

und bilde

$$\bar{Q}(x_\lambda) = Q(x_\lambda) + k\,q(x_\lambda) = \sum_\varkappa' (c_\varkappa^2 + k\gamma_\varkappa) y_\varkappa^2 = \sum_\varkappa' \bar{c}_\varkappa^2 y_\varkappa^2, \tag{201}$$

worin also

$$\bar{c}_\varkappa^2 = c_\varkappa^2 + \bar{k}\gamma_\varkappa.$$

Wegen (198) und (200) ist

$$\bar{Q}(X_\lambda^{(\mu)}) = Q(X_\lambda^{(\mu)}) = 1. \tag{202}$$

Es sei $\bar{k}$ absolut so klein, daß sämtliche

$$\bar{c}_\varkappa^2 = c_\varkappa^2 + \bar{k}\gamma_\varkappa > 0 \tag{203}$$

bleiben, so daß also $\bar{Q}(x_\lambda)$ eine eigentlich definite quadratische Form bleibt. Da wegen (200) unter den $\gamma_\varkappa$ sowohl positive wie negative vorkommen müssen, ist dies eine Beschränkung des absoluten Betrages sowohl für positive wie für negative $\bar{k}$. Es sei

$$0 < \sigma < 1.$$

Man bestimme unter Beibehaltung von (203) k so, daß

$$\frac{\sigma^6}{27} \prod_\varkappa \frac{1}{c_\varkappa^2 + \bar{k}\gamma_\varkappa} \geqq D^2 \tag{204}$$

oder

$$\prod_\varkappa \frac{\sigma^2}{3\bar{c}_\varkappa^2} \geqq D^2$$

oder

$$\prod_\varkappa \frac{\sigma}{\sqrt{3}\,\bar{c}_\varkappa} \geqq |D|, \tag{205}$$

was sowohl für positive wie für negative $\bar{k}$ möglich ist, da der Nenner der linken Seite von (204) beliebig klein gemacht werden kann. Nach einem Minkowskischen[1]) Satze gibt es wegen (205) ein Wertsystem mit ganzzahligen X_λ', die nicht sämtlich 0, so daß

$$|Y_\varkappa'| = \left| \sum_\lambda' a_{\varkappa\lambda} X_\lambda' \right| \leqq \frac{\sigma}{\sqrt{3}\,\bar{c}_\varkappa}.$$

Es ist also

$$Q(X_\lambda') = \sum_\varkappa' c_\varkappa^2 Y_\varkappa'^2 \leqq 3\left(\frac{\sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 = \sigma^2 < 1.$$

[1]) H. Minkowski, Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, S. 9.

Mit Rücksicht auf (202) ist das Wertetripel X_λ' von sämtlichen Wertetripeln $X_\lambda^{(\mu)}$ verschieden. Die Anzahl der ganzzahligen Wertetripel x_λ, die nicht alle drei gleich 0, für die

$$\overline{Q}(x_\lambda) < 1, \tag{206}$$

ist endlich. Da sie von den $X_\lambda^{(\mu)}$ verschieden, so ist für dieselben Wertetripel

$$Q(x_\lambda) > 1. \tag{207}$$

Es ist also

$$0 < l(x_\lambda) = \frac{Q(x_\lambda)-1}{Q(x_\lambda)-\overline{Q}(x_\lambda)} = \frac{Q(x_\lambda)-1}{\bar{k}(-q(x_\lambda))} < 1. \tag{208}$$

Das Minimum l der endlich vielen Werte von $l(x_\lambda)$ werde für

$$x_\lambda = X_\lambda^{(M+1)}$$

angenommen. Es ist also

$$l = l(X_\lambda^{(M+1)}) \leqq l(x_\lambda) \tag{209}$$

für alle ganzzahligen Wertetripel x_λ, die (206) genügen, also

$$0 < l < 1. \tag{210}$$

Es werde

$$\bar{k} = \bar{k}\cdot l = \bar{k}\cdot l(X_\lambda^{(M+1)}) = \frac{Q(X_\lambda^{(M+1)})-1}{-q(X_\lambda^{(M+1)})} \tag{211}$$

gesetzt und

$$\overline{\overline{Q}}(x_\lambda) = Q(x_\lambda) + \bar{k}\,q(x_\lambda). \tag{212}$$

Ich behaupte, daß

$$\overline{\overline{Q}}(X_\lambda^{(\mu)}) = 1 \tag{213}$$

für $\mu = 1, \ldots, M, M+1$,

$$\overline{\overline{Q}}(x_\lambda) \geqq 1$$

für alle übrigen Wertetripel x_λ. (213) ist für $\mu = 1, \ldots, M$ bereits als Spezialfall von (202) bewiesen. Es ist nach (212) und (211)

$$\overline{\overline{Q}}(X_\lambda^{(M+1)}) = 1.$$

Wenn (206) gilt, so ist nach (209) und (208)

$$\overline{\overline{Q}}(x_\lambda) = Q(x_\lambda) + \bar{k}\,l\cdot q(x_\lambda) \geqq Q(x_\lambda) + \bar{k}\cdot l(x_\lambda)\cdot q(x_\lambda) = 1.$$

Wenn

$$\overline{\overline{Q}}(x_\lambda) \geqq 1,$$

so ist nach (201), (210) und dem Anfang von (211)

$$\begin{aligned} Q(x_\lambda) = Q(x_\lambda) + l(\overline{Q}(x_\lambda) - Q(x_\lambda)) &= l\cdot\overline{Q}(x_\lambda) + (1-l)\,Q(x_\lambda) \\ &\geqq l + (1-l) = 1. \end{aligned}$$

Solange $\mathsf{M} < 3$, kann man M also durch passende Verfügung über die Faktoren $c_\varkappa$ vergrößern. Wegen (208) ist

$$\operatorname{sgn} l = +1,$$

wegen (207)

$$\operatorname{sgn}(Q(X_\lambda^{(\mathsf{M}+1)}) - 1) = +1,$$

also wird nach (211)

$$\operatorname{sgn} q(X_\lambda^{(\mathsf{M}+1)}) = \operatorname{sgn} \frac{Q(X_\lambda^{(\mathsf{M}+1)}) - 1}{(-k)} = -\operatorname{sgn} \overline{k} = -\operatorname{sgn} \overline{k}.$$

Man erhält also für positives und negatives k verschiedene Wertetripel $X_\lambda^{(\mathsf{M}+1)}$.

Es soll gezeigt werden, daß man $X_\lambda^{(\mu)}$ für $\mu = 1, 2, 3$ so finden kann, daß

$$\overline{Q}(X_\lambda^{(\mu)}) = 1, \tag{214}$$

$$\overline{Q}(x_\lambda) \geqq 1, \tag{215}$$

und daß keine Relation

$$\sum_\mu e^{(\mu)} X_\lambda^{(\mu)} = 0 \tag{216}$$

besteht für reelle $e^{(\mu)}$, die nicht sämtlich 0. Wäre zunächst

$$e^{(1)} X_\lambda^{(1)} + e_\lambda^{(2)} X^{(2)} = 0,$$

so wäre

$$e^{(1)\,2} \cdot Q(X_\lambda^{(1)}) = e^{(2)\,2} \cdot Q(X_\lambda^{(2)}),$$

also nach (214), (215)

$$e^{(1)\,2} = e^{(2)\,2}, \quad e^{(1)} = \pm 1, \quad e^{(2)} = \pm 1,$$

also $X_\lambda^{(1)}$ und $X_\lambda^{(2)}$ nicht wesentlich verschieden. Diese Betrachtungen sind für das binäre Problem ausreichend. Die folgenden Betrachtungen haben kein binäres Analogon.

Es sei zu $X_\lambda^{(1)}$ und $X_\lambda^{(2)}$ das Wertetripel $X_\lambda^{(3)}$ mit Hilfe des positiven, $X_\lambda^{(4)}$ mit Hilfe des negativen $\overline{k}$ bestimmt. Die Wertetripel $X_\lambda^{(3)}$ und $X_\lambda^{(4)}$ sind, wie bewiesen, verschieden. Es gelte (216) für die Summe über $\mu = 1, 2, 3$. Es muß $X_\lambda^{(3)}$ ganzzahlig darstellbar sein durch $X_\lambda^{(1)}$ und $X_\lambda^{(2)}$, sonst ergäbe sich, wie in § 1 des ersten Kapitels (24) bis (27) gezeigt, ein Widerspruch. Dasselbe gilt für $X_\lambda^{(1)}$ und $X_\lambda^{(2)}$. Eine Relation (216) ist also nur möglich, wenn sämtliche

$$e^{(\mu)} = \pm 1.$$

Würde nun (216) gleichzeitig für $\mu = 1, 2, 3$ und $\mu = 1, 2, 4$ gelten, so wäre bei passender Wahl der Vorzeichen

$$X_\lambda^{(3)} = X_\lambda^{(1)} + X_\lambda^{(2)},$$
$$X_\lambda^{(4)} = X_\lambda^{(1)} - X_\lambda^{(2)},$$

Entsprechend wäre wegen (199)

$$Y_\varkappa^{(3)} = Y_\varkappa^{(1)} + Y_\varkappa^{(2)}, \tag{217}$$

$$Y_\varkappa^{(4)} = Y_\varkappa^{(1)} - Y_\varkappa^{(2)}, \tag{218}$$

Wenn nicht für alle drei $\varkappa$

$$\operatorname{sgn} Y_\varkappa^{(1)} = \operatorname{sgn} Y_\varkappa^{(2)}, \tag{219}$$

oder für alle drei

$$\operatorname{sgn} Y_\varkappa^{(1)} = -\operatorname{sgn} Y_\varkappa^{(2)}, \tag{220}$$

so ist doch eine der beiden Gleichungen (219), (220) für zwei Indizes $\varkappa$ richtig, für den dritten falsch. Das treffe z. B. für (219) zu. Dann gilt für die zwei Indizes $\varkappa$

$$\operatorname{sgn} Y_\varkappa^{(3)} = \operatorname{sgn} Y_\varkappa^{(1)} \tag{221}$$

und

$$\operatorname{sgn} Y_\varkappa^{(3)} = \operatorname{sgn} Y_\varkappa^{(2)}; \tag{222}$$

für den dritten ist von den beiden Gleichungen (221) und (222) nur eine richtig. Das treffe z. B. für (221) zu. (221) gilt also in diesem Falle für alle drei Indizes $\varkappa$, ebenso wie in dem Falle, das (219) für alle drei Indizes $\varkappa$ gilt. Man halte $Y_\varkappa^{(3)}$ und $Y_\varkappa^{(1)}$ fest und bestimme $Y_\varkappa^{(5)}$ so, daß

$$\bar{\bar{Q}}(X_\lambda^{(\mu)}) = \sum_\varkappa{}' \bar{\bar{c}}_\varkappa^2 Y_\varkappa^{(\mu)\,2} = 1 \qquad (\mu = 1, 3, 5) \tag{223}$$

durch Übergang zum entgegengesetzten Vorzeichen von $\bar{k}$. Würde nun wieder eine Relation von der Form (216) gelten, so wäre nach (217)

$$Y_\varkappa^{(5)} = Y_\varkappa^{(3)} + Y_\varkappa^{(1)}. \tag{224}$$

(Die Verwendung von (218) würde wieder auf $Y_\varkappa^{(1)}$, $Y_\varkappa^{(2)}$, $Y_\varkappa^{(5)}$ führen.) Aus (224) folgt wegen (221)

$$|Y_\varkappa^{(5)}| = |Y_\varkappa^{(3)}| + |Y_\varkappa^{(1)}| \geqq |Y_\varkappa^{(1)}|. \tag{225}$$

Hier kann an zweiter Stelle nicht für alle drei $\varkappa$ das Gleichheitszeichen stehen; denn, weil nicht alle drei

$$Y_\varkappa^{(1)} = -Y_\varkappa^{(2)},$$

so sind nicht alle drei

$$Y_\varkappa^{(3)} = 0.$$

Es war

$$c_\varkappa^2 > 0, \qquad \bar{c}_\varkappa^2 > 0.$$

Es ist nach (210)

$$\bar{\bar{c}}_\varkappa^2 = c_\varkappa^2 + \bar{\bar{k}}\gamma_\varkappa = c_\varkappa^2 + l\bar{k}\gamma_\varkappa = c_\varkappa^2 + l(\bar{c}^2 - c_\varkappa^2) = (1-l)c_\varkappa^2 + l\bar{c}_\varkappa^2 > 0.$$

Dasselbe gilt von $\overline{\overline{c}}_\varkappa^2$. Mithin ist nach (225)

$$Q(X_\lambda^{(5)}) = \sum_\varkappa \overline{\overline{c}}_\varkappa^2 Y_\varkappa^{(5)2} > \sum_\varkappa \overline{c}_\varkappa^2 Y_\varkappa^{(1)2} = 1.$$

Das widerspricht aber (223) für $\mu = 5$. Die Annahme, daß bei Festhaltung von $X_\lambda^{(1)}$ und $X_\lambda^{(3)}$ und Übergang zum entgegengesetzten Vorzeichen von k wieder eine Relation (216) auftritt, führt also zu einem Widerspruch. Es ist also stets möglich, für $\mu = 1, 2, 3$ (214) so zu erfüllen, daß (215) allgemein gilt und keine Relation (216) besteht.

Dann sind die Bedingungen (12) bis (17) erfüllt mit der Spezialisierung

$$B_{\gamma\gamma} = 1. \tag{226}$$

Die durch (10) definierte quadratische Form ist also eine reduzierte und es gilt (11). (29) spezialisiert sich zu

$$|B_{\alpha\beta}| \leqq \frac{1}{2}, \tag{227}$$

(33) im Falle (B) zu

$$|B_{12}| + |B_{13}| + |B_{23}| \leqq 1. \tag{228}$$

§ 3.

Nach (23) läßt sich mit Rücksicht auf (226) zu jedem reellen Wertetripel ζ_α ein ganzzahliges Wertetripel z_α so finden, daß

$$R(z_\alpha - \zeta_\alpha) \leqq \frac{3}{4}. \tag{229}$$

Nach einem Gaußschen[2]) Satze ist für positive ternäre reduzierte Formen

$$2D(R) \geqq B_{11} B_{22} B_{33},$$

hier also wegen (226)

$$2D(R) \geqq 1. \tag{230}$$

Aus (229) folgt nunmehr

$$R(z_\alpha - \zeta_\alpha) \leqq \frac{3}{4} \leqq \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{D(R)},$$

also nach (191)

$$\prod_\varkappa c_\varkappa^2 (y_\varkappa - \eta_\varkappa)^2 \leqq \frac{1}{27} (R(z_\alpha - \zeta_\alpha))^3 \leqq \frac{1}{64} \cdot 2 \cdot D(R) = \frac{1}{8^2} \cdot 2 \cdot D^2 \cdot \prod_\varkappa c_\varkappa^2$$

oder

$$\left| \prod_\varkappa (y_\varkappa - \eta_\varkappa) \right| \leqq \frac{D}{8} \sqrt{2}. \tag{231}$$

---

[2]) Gauß, Journ. f. Math. **20**, S. 312–320. Der Satz ist wiederholt bewiesen worden: Dirichlet, Journ. f. Math. **40**, S. 209–227; Korkine u. Zolotareff, Math. Ann. **6**, S. 366 u. folg.; Minkowski, Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, S. 113–117.

Dies ist bereits der zu beweisende Hauptsatz um den Faktor $\sqrt{2}$ verschlechtert.

Für das binäre Problem ergibt sich aus (24) anstatt (229)

$$\hat{R}(\hat{z}_\alpha - \hat{\zeta}_\alpha) \leqq \frac{1}{2}. \tag{232}$$

Es wird

$$\hat{D}(\hat{R}) = 1 - \hat{B}_{12}^2 \geqq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

oder

$$\frac{4}{3}\hat{D}(\hat{R}) \geqq 1.$$

Aus (232) folgt nunmehr

$$\hat{R}(\hat{z}_\alpha - \hat{\zeta}_\alpha) \leqq \frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\hat{D}(\hat{R})},$$

also nach (191) unter Berücksichtigung der Koeffizienten (196)

$$\prod_\varkappa \hat{c}_\varkappa^2 (\hat{y}_\varkappa - \hat{\eta}_\varkappa)^2 \leqq \frac{1}{4}(\hat{R}(\hat{z}_\alpha - \hat{\zeta}))^2 \leqq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \hat{D}(\hat{R})$$

oder

$$\left| \prod_\varkappa (\hat{y}_\varkappa - \hat{\eta}_\varkappa) \right| \leqq \frac{|\hat{D}|}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{233}$$

Das ist bereits (195) verschlechtert um den Faktor $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

§ 4.

Um (188) zu beweisen, werde ich von (230) keinen Gebrauch machen, dagegen von den gesamten Entwicklungen des ersten Kapitels.

Damit (194) gilt, ist notwendig und hinreichend, daß

$$W(Q) \leqq \frac{3}{4}\sqrt[3]{D(Q)} \tag{234}$$

oder nach (178)

$$\varepsilon(Q) \leqq \frac{3}{4}. \tag{235}$$

Der Additionssatz (179), (181) erlaubt, den Beweis von (235) auf die Verifikation spezieller Fälle zurückzuführen. Wegen (182) will ich im folgenden nur noch berücksichtigen, daß

$$B = B_{11} = B_{22} = B_{33}, \tag{236}$$

dagegen (226) nicht mehr. An die Stelle von (227) tritt

$$|B_{\alpha\beta}| \leqq \frac{B}{2}, \tag{237}$$

an die Stelle von (228)

$$|B_{12}| + |B_{13}| + |B_{23}| \leqq B. \tag{238}$$

Fall (A): Das Schema (158) ist symmetrisch in bezug auf die Indizes 1 und 2. Nötigenfalls durch Vertauschung von 1 und 2 läßt sich erreichen, daß

$$B_{23} \geqq B_{13}.$$

Es ergibt sich mit Rücksicht auf (237)

$$\begin{aligned} B_{12} &= \mathsf{A}, \\ B_{13} &= \mathsf{A}+\mathsf{B}, \\ B_{23} &= \mathsf{A}+\mathsf{B}+\Gamma, \\ B &= 2\mathsf{A}+2\mathsf{B}+2\Gamma+\Delta, \end{aligned}$$

wo

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta \geqq 0$$

sein müssen. (158) nimmt die Gestalt an

$$(239)\quad \left\{ g_{pq} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \left| \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 0, & \mathsf{A}+\mathsf{B}+2\Gamma+\Delta, & \mathsf{B}, & \mathsf{A} \\ \mathsf{A}+\mathsf{B}+2\Gamma+\Delta, & 0, & \mathsf{A}+\Gamma+\Delta, & \mathsf{B}+\Gamma \\ \mathsf{B}, & \mathsf{A}+\Gamma+\Delta, & 0, & \mathsf{A}+\mathsf{B}+\Gamma+ \\ \mathsf{A}, & \mathsf{B}+\Gamma, & \mathsf{A}+\mathsf{B}+\Gamma+\Delta, & 0 \end{array} \right. \right.$$

Fall (B), Unterfall (I). Es sei

$$(240)\quad \left\{ \begin{aligned} |B_{12}| + |B_{13}| - |B_{23}| &= 2\mathsf{A} \geqq 0, \\ |B_{21}| + |B_{23}| - |B_{13}| &= 2\mathsf{B} \geqq 0, \\ |B_{31}| + |B_{32}| - |B_{12}| &= 2\Gamma \geqq 0, \end{aligned} \right.$$

dann ist

$$(241)\qquad |B_{12}| = \mathsf{A}+\mathsf{B}, \quad |B_{13}| = \mathsf{A}+\Gamma, \quad |B_{23}| = \mathsf{B}+\Gamma,$$

und mit Rücksicht auf (238)

$$(242)\qquad B = 2\mathsf{A}+2\mathsf{B}+2\Gamma+\Delta,$$

wo

$$\Delta \geqq 0.$$

(241) und (242) erfüllen auch (237). (160) nimmt die Form an

$$(243)\quad \left\{ g_{pq} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \left| \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 0, & \mathsf{A}+\Gamma, & \mathsf{A}+\mathsf{B}, & \mathsf{B}+\Gamma+\Delta \\ \mathsf{A}+\Gamma, & 0, & \mathsf{B}+\Gamma, & \mathsf{A}+\mathsf{B}+\Delta \\ \mathsf{A}+\mathsf{B}, & \mathsf{B}+\Gamma, & 0, & \mathsf{A}+\Gamma+\Delta \\ \mathsf{B}+\Gamma+\Delta, & \mathsf{A}+\mathsf{B}+\Delta, & \mathsf{A}+\Gamma+\Delta, & 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Fall (B), Unterfall (II). Es sollen die Ungleichheiten (240) nicht sämtlich gelten. Man wähle die Bezeichnung so, daß $|B_{23}|$ das Maximum der drei Größen $|B_{23}|, |B_{13}|, |B_{12}|$. Setzt man

$$|B_{12}| = \mathsf{A}, \quad |B_{13}| = \mathsf{B},$$

so wird

$$|B_{23}| = \mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma,$$

wo

$$\Gamma \geqq 0,$$

da andernfalls die Ungleichheiten (240) sämtlich erfüllt wären. Es gilt, diesmal wegen (237), wieder (242), und (238) ist von selbst erfüllt. (160) nimmt die Form an

$$44) \quad \left\{ g_{pq} = \begin{matrix} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0, & \mathsf{B}, & \mathsf{A}, & \mathsf{A}+\mathsf{B}+2\Gamma+\Delta \\ \mathsf{B}, & 0, & \mathsf{A}+\mathsf{B}+\Gamma, & \mathsf{A}+\Gamma+\Delta \\ \mathsf{A}, & \mathsf{A}+\mathsf{B}+\Gamma, & 0, & \mathsf{B}+\Gamma+\Delta \\ \mathsf{A}+\mathsf{B}+2\Gamma+\Delta, & \mathsf{A}+\Gamma+\Delta, & \mathsf{B}+\Gamma+\Delta, & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}.$$

Wegen (179) bis (182) genügt es, (235) zu beweisen in den speziellen Fällen, daß in (239), (243), (244) eine der vier Größen A, B, Γ, Δ gleich 1, die übrigen 0 sind, d. h. also für die Fälle:

$$(245) \qquad g_{pq} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & 0 \end{pmatrix},$$

$$(246) \qquad g_{pq} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \end{pmatrix},$$

$$(247) \qquad g_{pq} = \begin{pmatrix} 0, & 2, & 0, & 0 \\ 2, & 0, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \end{pmatrix},$$

$$(248) \qquad g_{pq} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \end{pmatrix},$$

$$(249) \qquad g_{pq} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0, & 0 \end{pmatrix},$$

$$(250)\qquad g_{pq}=\begin{pmatrix}0,&0,&0,&1\\0,&0,&0,&1\\0,&0,&0,&1\\1,&1,&1,&0\end{pmatrix},$$

$$(251)\qquad g_{pq}=\begin{pmatrix}0,&0,&0,&2\\0,&0,&1,&1\\0,&1,&0,&1\\2,&1,&1,&0\end{pmatrix}.$$

Sowohl (248) wie (250) liefern

$$(252)\qquad \begin{aligned} &B_{\alpha\beta}=0 \quad \text{für} \quad \alpha\neq\beta,\\ &B_{\alpha\alpha}=1,\\ &R(z_\alpha)=\sum_\alpha z_\alpha^2,\\ &D(R)=1. \end{aligned}$$

Wegen (229) ist

$$R(z_\alpha-\zeta_\alpha)\leqq\frac{3}{4}$$

bestimmbar. Für $\zeta_\alpha=\frac{1}{2}$ tritt das Gleichheitszeichen auf; da andererseits

$$\left|z_\alpha-\frac{1}{2}\right|\geqq\frac{1}{2}$$

für alle ganzzahligen z_α, so ist

$$R\left(z_\alpha-\frac{1}{2}\right)=\sum_\alpha\left(z_\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\geqq\frac{3}{4}$$

für alle ganzzahligen z_α, also

$$(253)\qquad \begin{aligned} &W(R)=\frac{3}{4}=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\sqrt[3]{D(R)},\\ &\varkappa(R)=\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

womit (234), also auch (235) bewiesen ist. Es ist

$$(254)\qquad \left\{\begin{aligned} 3\cdot\begin{pmatrix}0,&0,&1,&1\\0,&0,&1,&1\\1,&1,&0,&0\\1,&1,&0,&0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0,&0,&1,&0\\0,&0,&1,&1\\1,&1,&0,&0\\0,&1,&0,&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,&0,&0,&1\\0,&0,&1,&1\\0,&1,&0,&0\\1,&1,&0,&0\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}0,&0,&1,&1\\0,&0,&0,&1\\1,&0,&0,&0\\1,&1,&0,&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,&0,&1,&1\\0,&0,&1,&0\\1,&1,&0,&0\\1,&0,&0,&0\end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Die vier Matrizen auf der rechten Seite von (254) gehen aber durch Vertauschung der Indizes aus (248) hervor; damit ist also (249) erledigt und die aus ihm durch Vertauschung hervorgehenden (245) und (246). Die Matrizen (247) und (251) gehen ebenfalls durch Vertauschung ineinander über. (247) liefert nach Division mit 2

$$B = 1; \quad B_{12} = 0; \quad B_{13} = 0; \quad B_{23} = \frac{1}{2}; \tag{255}$$

$$R(z) = z_1^2 + z_2^2 + z_2 z_3 + z_3^2 = z_1^2 + \hat{R}^*(z_2, z_3). \tag{256}$$

Es ist

$$\hat{R}^*(1, 0) = 1; \quad \hat{R}^*(0, 1) = 1; \quad \hat{R}^*(1, -1) = 1. \tag{257}$$

Durch eine Transformation analog (44), (45) geht also $\hat{R}^*$ in $\hat{S}^*$ über. Es läßt sich zu jedem Wertetripel ζ_α ein ganzzahliges Wertetripel z_α so bestimmen, daß mit Rücksicht auf (185)

$$R(z_\alpha - \zeta_\alpha) \leqq \frac{1}{4} + \hat{W}(\hat{R}^*) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}. \tag{258}$$

Da man über ζ_1 einerseits und über ζ_2 und ζ_3 andererseits unabhängig voneinander so verfügen kann, daß die Maximalwerte $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ erreicht werden, so ist

$$W(R) = \frac{7}{12}. \tag{259}$$

Es ist

$$D(R) = 1 \cdot \hat{D}(\hat{R}^*) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \tag{260}$$

wie übrigens auch aus (186) hervorgeht. Es ergibt sich

$$\varepsilon(R) = \frac{\frac{7}{12}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7^3 \cdot 2^2}{3^7}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\left(\frac{1372}{2187}\right)^{\frac{1}{3}} < \frac{3}{4}. \tag{261}$$

Damit ist (235) für sämtliche Matrizen (245) bis (251) verifiziert, gilt also nach (179) und (181) für (239), (243), (244), also für alle quadratischen Formen, für deren reduzierte Formen (236) gilt. In eine solche Form läßt sich aber jede Form durch passende Verfügung über die $c_\varkappa$ nach § 2 überführen. Bei passender Wahl der $c_\varkappa$ gilt also für jede Form (194), woraus unter Benutzung von (191) die zu beweisende Beziehung (188) folgt. Das Gleichheitszeichen galt in (176) nur im Falle (177), der Addition proportionaler Formen. (253) trat nur auf bei den Matrizen (248) und (250), die auf (252) führen; es kann also nur im Fall (4) oder für eine äquivalente Form auftreten. In allen anderen Fällen findet eine Addition nicht proportionaler Formen statt, gilt also in (188) das Ungleichheitszeichen.

Für das binäre Problem wird $\hat{B}_{11} = \hat{B}_{22}$, also nach (164): $\hat{g}_1 = \hat{g}_2$. Nach (165) und (148) wird

$$\hat{g}_3 = \hat{B}_{12} \leqq \frac{1}{2}\hat{B}_{11} = \frac{1}{2}(\hat{g}_1 + \hat{g}_3),$$

also $\hat{g}_3 \leqq \hat{g}_1$. Man setze

$$\hat{g}_3 = \hat{\mathsf{A}}, \qquad \hat{g}_1 = \hat{g}_2 = \hat{\mathsf{A}} + \hat{\mathsf{B}}.$$

Der Fall

(262) $$\hat{\mathsf{A}} = 0; \qquad \hat{\mathsf{B}} = 1$$

liefert $\hat{B}_{12} = 0$, also

$$\hat{R}(\hat{z}_\alpha) = \hat{z}_1^2 + \hat{z}_2^2, \qquad \hat{R}(\hat{z}_\alpha - \hat{\zeta}_\alpha) \leqq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Das Gleichheitszeichen tritt für $\hat{\zeta}_\alpha = \frac{1}{2}$ auf, also

$$\hat{W}(\hat{R}) = \frac{1}{2}, \qquad \hat{D}(\hat{R}) = 1,$$

also

$$\hat{\varepsilon}(\hat{R}) = \frac{\hat{W}(\hat{R})}{\sqrt{\hat{D}(\hat{R})}} = \frac{1}{2}.$$

Der Fall

$$\hat{\mathsf{A}} = 1, \qquad \hat{\mathsf{B}} = 0$$

liefert

$$2\hat{g}_\alpha = 2(1, 1, 1) = (1, 1, 0) + (1, 0, 1) + (0, 1, 1),$$

läßt sich also aus (262) zusammensetzen. Es gelten also unter Berücksichtigung der Koeffizienten (196) die binären Beziehungen (194) und wegen (191) die Beziehung (195), wobei das Gleichheitszeichen nur im Falle (4) oder für äquivalente Formen auftreten kann.

Drittes Kapitel.

In diesem Kapitel will ich die geometrische Interpretation der beiden vorangehenden Kapitel ohne Beweis andeuten, und zwar die des ersten Kapitels in § 1, die des zweiten Kapitels in § 2.

§ 1.

Zerlegt man eine ternäre quadratische Form irgendwie in drei Quadrate von Linearformen und sieht man deren Basen als Koordinaten eines dreidimensionalen (für binäre Formen zweidimensionalen) Raumes an, so ist $Q(x_\lambda)$ das Quadrat der Entfernung des Punktes x_λ vom Nullpunkt. Die ganzzahligen x_λ liefern die Gitterpunkte eines im allgemeinen schiefwinkligen Punktgitters. Die in § 1 des ersten Kapitels behandelte Reduktion der quadratischen Formen bedeutet folgendes: Es wird ein dem Nullpunkt [0] nächster Gitterpunkt [1] gesucht, alle auf der Verbindungs-

geraden [0] [1] beider liegenden Gitterpunkte ausgenommen, unter den übrigen wieder ein nächster Gitterpunkt [2] gesucht, die in der Ebene der drei Punkte [0], [1], [2] liegenden Gitterpunkte ausgenommen und unter den übrigen noch einmal ein dem Nullpunkt nächster Gitterpunkt [3] gesucht. Sodann wird gezeigt, daß das aus diesen drei Strecken [0 1], [0 2], [0 3] gebildete Parallelepiped ein Elementarparallelepiped des Gitters ist, d. h. keinen von den Ecken verschiedenen Gitterpunkt in seinem Innern oder auf seiner Oberfläche enthält, oder anders definiert, durch wiederholte Aneinanderreihung das *ganze* Punktgitter erzeugt. Angenommen, das sei nicht der Fall, so betrachte man zunächst nur das aus den Punkten [0], [1], [2], [3] erzeugte Teilgitter. Es werden durch sämtliche Gitterpunkte die zur Ebene [0 1 2] parallelen Ebenen $[E_3]$ gelegt; die zu diesen parallelen Ebenen $[E_3']$, die ihren Abstand halbieren, teilen den Raum in Schichten. Nunmehr werden durch sämtliche Gitterpunkte die zu [0 1] parallelen Geraden $[g]$ gelegt, die in den Ebenen $[E_3]$ liegen. In den Ebenen $[E_3]$ werden die zu diesen parallelen Geraden $[g']$ gezogen, die ihren Abstand halbieren. In den $[g']$ werden auf den $[E_3]$ senkrechte Ebenen $[E_2]$ errichtet und auf beiden Seiten bis zu den nächsten Ebenen $[E_3']$ ausgedehnt. Der Raum ist so in unendlich lange Prismen mit rechteckigem Querschnitt eingeteilt. Schließlich werden auf den Geraden $[g]$ die Strecken zwischen den Gitterpunkten durch die Punkte $[P']$ halbiert und auf den Geraden $[g]$ in den Punkten $[P']$ senkrechte Ebenen $[E_1]$ errichtet, die die unendlich langen Prismen in lauter kongruente rechtwinklige Parallelepipede (Quader) teilen, deren Mittelpunkte die gegebenen Gitterpunkte sind. Jeder Raumpunkt ist von einem Gitterpunkt höchstens um die halbe Raumdiagonale des Quaders entfernt. Also ist das Quadrat der Entfernung vom nächsten Gitterpunkt

$$\leqq \frac{1}{4}\left[[0\,1]^2+[0\,2]^2+[0\,3]^2\right] \leqq \frac{3}{4}[0\,3]^2 < [0\,3]^2.$$

Besäße das Gitter außer dem betrachteten, durch [0], [1], [2], [3] erzeugten Gitter weitere Gitterpunkte, so läge also einer von diesen näher am Nullpunkte als [3], hätte also bei der Reduktion an Stelle von [3] berücksichtigt werden müssen. Die Annahme, daß [0], [1], [2], [3] nicht das ganze Gitter erzeugen, führt also zu einem Widerspruch; das aus den drei Strecken [0 1], [0 2], [0 3] gebildete Parallelepiped ist also Elementarparallelepiped des Gitters.

Die Aufgabe des § 3 bedeutet folgendes: „Durch das Wertetripel (ξ_λ) ist ein beliebiger Raumpunkt (in schiefwinkligen Koordinaten) gegeben. Es soll der nächste Gitterpunkt (X_λ) bestimmt werden."

Ich will (X_λ) das zu (ξ_λ) gehörige Wabenzentrum nennen, $w(\xi_\lambda) = Q(X_\lambda - \xi_\lambda)$, das Quadrat des kürzesten Abstandes zwischen (ξ_λ) und

einem Gitterpunkte, den Wabenwert von (ξ_λ). Für homologe Punkte (d. h. solche, deren Verbindungsstrecke parallel und gleich derjenigen zweier Gitterpunkte) ist der Wabenwert derselbe. Der Wabenwert ist eine endliche stetige Funktion des Ortes. Die Menge der Punkte, die denselben Gitterpunkt (X_λ) zum Wabenzentrum haben, möge die zu (X_λ) gehörige Wabenzelle[3]) heißen. Die Wabenzellen sind konvexe Körper, deren Mittelpunkt das Wabenzentrum ist. Jeder Punkt des Raumes gehört zu mindestens einer Wabenzelle. Die Punkte, die gleichzeitig zu zwei Wabenzentren gehören, bilden eine Zellwand, die zu drei Wabenzentren gehören, eine Zellkante, die zu vier nicht in einer Ebene liegenden Wabenzentren gehören, eine Zellecke. (37), (39) bedeuten: der Wabenwert kann relative, also auch absolute Maxima nur in den Zellecken annehmen. Das läßt sich so einsehen. Nach einem Punkt im Innern der Wabenzelle wird vom Zentrum aus ein Strahl gezogen und bis zur Zellwand verlängert. Die Zellwand liegt in einer Ebene, die senkrecht steht auf der Verbindungslinie der beiden benachbarten Zentren und sie halbiert. Der Fußpunkt hat den kürzesten Abstand von den beiden Zentren; vom Fußpunkt wird nach dem erreichten Wandpunkt ein zweiter Strahl in der Wand gezogen und verlängert, bis er eine Kante trifft. Die Kante steht senkrecht auf der Ebene der drei benachbarten Zentren, ihr Fußpunkt hat von ihnen den kürzesten Abstand. Die Kante wird vom Fußpunkt weg verlängert, bis man zu einer Zellecke gelangt. Auf diesem Wege wird der Abstand vom Zentrum ständig vergrößert, (94), so daß der Abstand nur in einer Zellecke sein Maximum erreichen kann, (104). Durch (44) bis (47) sind Tetraederkoordinaten eingeführt. (50) formt die quadratische Form Q für Tetraederkoordinaten um und drückt das Quadrat des Abstandes zweier

[3]) Das Folgende möge zur Rechtfertigung der Bezeichnung dienen: Jede Biene arbeitet, indem sie sich nach allen Seiten dreht, als ihre Zelle denjenigen Teil des Raumes aus, der ihr näher ist als der Nachbarbiene, und drückt etwaige Vorwölbungen der Wand in ihr Gebiet immer wieder zurück. Die Bienen beginnen den Bau der Wabe in zwei Schichten mit den Köpfen gegeneinander zusammengedrängt und errichten zunächst eine Wachswand zwischen sich. In dieser Lage sind ihre Köpfe als zwei Schichten von Kugeln in dichtester Lagerung zu betrachten, so daß jede Kugel sechs Kugeln der eigenen Schicht und drei Kugeln der anderen Schicht berührt. Die zugehörige mathematische Wabenzelle ist ein Rhombendodekaeder. Von diesem werden drei mit den stumpfen Winkeln aneinanderstoßende Rhomben wirklich hergestellt, die den Boden der Zelle bilden. Beim weiteren Ausbau muß die Biene den Kopf allmählich zurückbewegen. Die sechs an den Boden anstoßenden Rhomben werden sehr stark verlängert zu den Seitenwänden der Zelle, deren Querschnitt ein reguläres Sechseck ist. Die natürliche Bienenzelle ist also zusammengesetzt aus der Lösung des räumlichen Problems für das Gitter der dichtesten Lagerung von Kugeln und der prismatischen Ausführung der Lösung des ebenen Problems für das Gitter der dichtesten Lagerung von Kreisen.

Punkte durch die Differenzen ihrer Tetraederkoordinaten mit den Quadraten der Kanten des Tetraeders als Koeffizienten aus. Die Maxima der Wabenwerte werden in den Mittelpunkten von Kugeln erreicht, die durch vier Gitterpunkte gehen, sind also Quadrate von Umkugelradien, die in (65) berechnet werden. Der Mittelpunkt der Umkugel des Tetraeders, das von irgend vier nicht in einer Ebene liegenden Gitterpunkten gebildet wird, ist dann und nur dann Ecke einer Wabenzelle, wenn er keinem anderen Gitterpunkte näher liegt oder, was dasselbe besagt, die Umkugel keinen weiteren Gitterpunkt in ihrem Inneren enthält. Diese Bedingung findet in (106) ihren einfachen arithmetischen Ausdruck. $-\frac{1}{2}S(m^{(\varrho)})$ ist nicht das Quadrat einer Entfernung, da ja die Summe der Argumente 1 und nicht 0 ist. Es ist das Quadrat der Entfernung des Punktes (x_λ) vom Mittelpunkt der Umkugel vermindert um das Quadrat ihres Radius, die „Potenz" des Punktes (x_λ) in bezug auf die Umkugel, die für außerhalb liegende Punkte positiv sein muß.

In § 4 werden die unendlich vielen Bedingungen (106) ersetzt durch endlich viele unter ihnen. Für das binäre Problem ist (108) oder (121) die Bedingung der Spitzwinkligkeit des Dreiecks. Es ist also für die Ebene folgender Satz bewiesen: „Alle spitzwinkligen Dreiecke und nur diese (einschließlich der rechtwinkligen als Grenzfall) haben die Eigenschaft, daß ihr Umkreis keinen Punkt des von den Ecken erzeugten Punktgitters in seinem Innern enthält."

Für den Raum ist bewiesen:

„Damit die Umkugel eines Tetraeders keinen Punkt des von seinen Ecken erzeugten Punktgitters in ihrem Innern enthält, ist notwendig und hinreichend, daß die vier Seitendreiecke spitzwinklig oder rechtwinklig sind."

Die verlängerten Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks zerlegen die Quadrate über den gegenüberliegenden Seiten in zwei Rechtecke, von denen je zwei an einer Ecke zusammenstoßende einander gleich sind (verallgemeinerter pythagoreischer Lehrsatz); die drei Rechtecksinhalte kann man als drei willkürliche positive Größen (von denen eine 0 sein kann) vorgeben und daraus die Quadrate der Seiten durch Addition zusammensetzen. Analog lassen sich die sechs Quadrate der Kanten eines Tetraeders mit lauter spitzwinkligen Seitendreiecken aus sechs willkürlich vorgegebenen positiven Größen g_{pq} zusammensetzen [4]). Man bilde die Summe der Quadrate je zweier gegenüberliegender Kanten. Die größte der drei Summen wird

[4]) Da bei beliebigen positiven g_{pq} die Form definit ist, so ist auch folgender elementargeometrischer Satz bewiesen: „Die Konstruktion eines Tetraeders aus sechs mit ihrer Anordnung gegebenen Kanten (die im allgemeinen nicht ausführbar zu sein braucht, selbst wenn die Seitendreiecke einzeln konstruierbar sind) ist stets ausführbar, wenn die aus den Kanten einzeln konstruierten Seitendreiecke spitzwinklig ausfallen."

bevorzugt, (109), (110). Die beiden Kanten mögen Hauptkanten, die vier übrigen Nebenkanten des Tetraeders heißen. Wird das Maximum von *zwei* Summen angenommen, so kann man irgend eins der beiden Paare auszeichnen. Die Quadrate der Hauptkanten werden aus vier, die der Nebenkanten aus drei von den Größen g_{pq} zusammengesetzt, (115), (116), (117). Die Verbindungslinie benachbarter Zentren, deren Zellen eine Wand gemeinsam haben, möge Nachbarstrecke heißen; ein Dreieck, dessen Seiten Nachbarstrecken sind, heiße Nachbardreieck; ein Tetraeder, dessen Kanten Nachbarstrecken sind, heiße Nachbartetraeder. Die Einteilung des *ebenen* Gitters in Nachbardreiecke ist die durch das Gitter eindeutig bestimmte Einteilung in spitzwinklige Dreiecke, die mit Hilfe der Reduktion der quadratischen Formen gefunden wird, wie am Schlusse des § 7 gezeigt ist. Es gibt zwei Klassen nicht homologer Nachbardreiecke, die als Scheiteldreiecke zueinander liegen, also denselben Umkreisradius haben. Sämtliche Ecken der Zelle sind mithin vom Mittelpunkt gleich weit entfernt. Jeder Gitterpunkt hat sechs Nachbarpunkte, es stoßen sechs Nachbardreiecke in ihm zusammen. Wie in § 8 gezeigt wird, ist die ebene Wabenzelle ein Sechseck, und zwar ein einem Kreise eingeschriebenes Sechseck, das den Mittelpunkt des Kreises zum Mittelpunkte hat[5]). Im räumlichen Gitter gibt es sechs Klassen nicht homologer Nachbartetraeder. An jedem Gitterpunkte stoßen $6 \cdot 4 = 24$ Nachbartetraeder zusammen, da jede Klasse homologer Tetraeder mit vier Tetraedern, den vier verschiedenen Ecken entsprechend, an den Gitterpunkt stößt. Die Wabenzellen haben 24 Zellecken. Da die nicht homologen Tetraeder paarweise als Scheiteltetraeder aufgefaßt werden können, sind ihre Umkugelradien paarweise einander gleich, es kommen also im allgemeinen drei verschiedene Umkugelradien vor, deren Quadrate die relativen Maxima des Wabenwertes sind. Das Quadrat des größten unter ihnen ist das absolute Maximum des Wabenwertes $W(Q)$. Die Kantenlängen für je zwei Scheiteltetraeder stimmen überein. Es gibt also drei Systeme von sechs Kanten. Die vier Nebenkanten sind in allen drei Systemen dieselben. Es kommen drei Hauptkanten vor. Ein System von Kantenquadraten geht durch acht von den 24 Vertauschungen der Indizes der g_{pq} in sich über, die anderen Vertauschungen liefern die beiden anderen Systeme. Die Summe der Quadrate der drei Hauptkanten ist gleich der Summe der Quadrate der vier Nebenkanten, (131a). An jeder Hauptkante stoßen vier, an jeder Nebenkante sechs Nachbartetraeder zusammen. Von jedem Gitterpunkt gehen acht Nebenkanten und sechs Hauptkanten aus, je zwei nach entgegengesetzten Richtungen. Jeder Gitterpunkt hat also 14 Nachbarpunkte. Wie in § 6

[5]) Siehe Dirichlet, Journ. f. Math. **40** (1850), S. 216, Figur.

gezeigt wird, hat die Wabenzelle 14 Seitenflächen, sechs Parallelogramme und acht Sechsecke mit Mittelpunkt. Betrachtet man die 14 Nachbarpunkte eines Gitterpunktes als Ecken eines Körpers, des Nachbarkörpers, der die Wabenzelle um seinen Mittelpunkt in seinem Innern enthält, so hat dieser zwölf Parallelogramme zu Seitenflächen, die in den sechs Endpunkten der vom Mittelpunkt ausgehenden Hauptkanten zu vieren, in den acht Endpunkten der vom Mittelpunkt ausgehenden Nebenkanten zu dreien zusammenstoßen. Der Körper ist eine affine Verzerrung des Rhombendodekaeders. Betrachtet man drei nicht in entgegengesetzter Richtung von einem Gitterpunkt ausgehende Hauptkanten als Kanten eines Elementarparallelepipeds, so erhält man die quadratische Form $T(v_I, v_{II}, v_{III})$, (131), die die Symmetrie der Anordnung der Wabenzellen wiedergibt. Das Elementarparallelepiped von T hat aber den doppelten Rauminhalt des von Q. T stellt also nur die Hälfte der Gitterpunkte von Q ganzzahlig dar. Die fehlenden Gitterpunkte von Q sind die Mittelpunkte der Elementarparallelepipede von T. Die sämtlichen im Punktgitter Q vorkommenden Hauptkanten bilden also zwei ineinandergeschobene Systeme, die keinen Punkt gemeinsam haben. Jedes System bildet die Kanten von Elementarparallelepipeden von T. Die Raumdiagonalen beider Systeme liegen auf denselben geraden Linien. Die halben Raumdiagonalen bilden die sämtlichen Nebenkanten, die im Gitter Q vorkommen. Die acht vom Nullpunkt ausgehenden Nebenkanten endigen also in den Ecken eines Elementarparallelepipeds von T, das den Nullpunkt zum Mittelpunkte hat. Den Nachbarkörper erhält man hieraus durch Aufsetzen von sechs vierseitigen Pyramiden, deren Spitzen in den Mittelpunkten der sechs benachbarten Elementarparallelepipede von T liegen. Das Volumen des Nachbarkörpers ist also das Doppelte dessen des Elementarparallelepipeds von T, das Vierfache des von Q. Im § 7 wird gezeigt, daß das betrachtete System mit Hilfe der Reduktion der ternären quadratischen Formen stets gefunden werden kann. Der Zusammenhang zwischen dem System der Nachbarkanten und der Reduktion ist ein ziemlich loser. Jede der drei bei der Reduktion gefundenen Strecken

$$[01], \quad [02], \quad [03] \tag{263}$$

kann Haupt- und Nebenkante sein. Hat das reduzierte Elementarparallelepiped eine Ecke mit drei spitzen Winkeln, so sei dies gerade die von den Strecken (263) gebildete Ecke, was durch passende Verfügung über die Richtungen (263) erreicht werden kann. Dann bilden $[0], [1], [2], [3]$ die Ecken eines Nachbartetraeders, (151) bis (157). Eine der drei Kanten (263), z. B. $[01]$, ist Hauptkante, die beiden anderen sind Nebenkanten. Schneidet man vom reduzierten Elementarparallelepiped das Nach-

bartetraeder ab, ebenso das dem Scheiteltetraeder homologe von der in der Raumdiagonale gegenüberliegenden Ecke, so bleibt ein Oktaeder übrig. Die Diagonalen des Oktaeders sind die drei durch [1], [2], [3] gehenden Raumdiagonalen des Elementarparallelepipeds. Vier in einer Ebene liegende Kanten des Oktaeders sind den beiden Hauptkanten [01] und [23] parallel und gleich. Die nicht in dieser Ebene liegende Diagonale des Oktaeders, die durch [1] geht, ist die dritte Hauptkante. Man zerlege das Oktaeder in vier Tetraeder durch die beiden Diagonalebenen, die sich in der Hauptkantendiagonale schneiden, und erhält die noch fehlenden vier Nachbartetraeder.

Besitzt das reduzierte Elementarparallelepiped eine Ecke mit drei stumpfen Winkeln, so sei dies wieder gerade die Ecke, die von den Strecken (263) gebildet wird. Dann sind alle drei Kanten (263) Nebenkanten. Die vierte Nebenkante ist die von [0] ausgehende Raumdiagonale des Elementarparallelepipeds. Die drei Hauptkanten sind die drei von [0] ausgehenden Flächendiagonalen. Die drei Ebenen, die alle durch die von [0] ausgehende Raumdiagonale und je eine durch eine von [0] ausgehende Kante und die gegenüberliegende Flächendiagonale gelegt sind, zerlegen das Elementarparallelepiped in sechs Nachbartetraeder.

Die Reduktion wird also der Symmetrie der Wabenzellen nur sehr unvollkommen gerecht.

Das bisher Gesagte gilt für den allgemeinen Fall. Die Entartungen besonders zu behandeln, war für das arithmetische Problem nicht nötig. Sie entstehen, wenn die 24 Zellecken teilweise zusammenfallen. Das bedeutet aber ein Zusammenfallen von Umkugelmittelpunkten; es liegen mehr als vier Gitterpunkte auf einer Kugel. In (118) kann $S(m^{(\varrho)})$ für andere Werte als

$$m^{(\varrho)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ für } \begin{Bmatrix} \varrho = \sigma \\ \varrho \neq \sigma \end{Bmatrix},$$

die den Ecken des Koordinatentetraeders entsprechen, nur verschwinden, wenn einzelne der g_{pq} verschwinden. Eine genauere Diskussion würde folgende Fälle ergeben:

A. 5 Gitterpunkte liegen auf einer Kugel und bilden eine Pyramide mit rechteckiger Basis und spitzwinkligen Seitendreiecken.

B. 6 Gitterpunkte liegen auf einer Kugel und bilden ein Oktaeder, das den Mittelpunkt der Kugel zum Mittelpunkt hat. Die Ebene durch je zwei Raumdiagonalen schneidet das Oktaeder in einem Rechteck.

C. 6 Gitterpunkte liegen auf einer Kugel und bilden ein gerades dreiseitiges Prisma mit spitzwinkliger Basis.

D. 8 Gitterpunkte liegen auf einer Kugel und bilden ein Quader.

Im Falle A wird die Wabenzelle von 8 Parallelogrammen und 4 Sechsecken begrenzt, durch die sich senkrecht ein rechteckiger Querschnitt legen läßt.

Im Falle B wird die Wabenzelle von 12 Parallelogrammen begrenzt, die in 6 Ecken zu vieren und in 8 Ecken zu dreien zusammenstoßen. Zieht man durch die 6 Ecken die Flächendiagonalen, so bilden diese ein Oktaeder der unter B beschriebenen Art. Die durch je zwei Raumdiagonalen des Oktaeders gelegten Ebenen, die also die Zelle in einem Rechteck schneiden, stehen senkrecht auf den Zellwänden.

Im Falle C ist die Wabenzelle ein gerades sechsseitiges Prisma, dessen Grundfläche einem Kreise eingeschrieben ist und mit ihm den Mittelpunkt gemeinsam hat.

Im Falle D ist die Wabenzelle ein Quader.

In den Fällen der Entartung wird der Begriff der Nachbarpunkte zweifelhaft. Verlangt man, daß die Zellen eine von 0 verschiedene Wand gemeinsam haben, so wird die Zahl der Nachbarpunkte eines Gitterpunktes verringert (im Falle des Quaders bis auf 6); verlangt man nur, daß sie einen Punkt gemeinsam haben, so wird die Zahl der Nachbarpunkte eines Gitterpunktes vermehrt (im Falle des Quaders bis auf 26). Im folgenden sollen die entarteten Fälle als in bestimmter Weise aus dem allgemeinen Falle entstanden gedacht werden, so daß also gewisse Kanten oder Ecken als entartete Flächen anzusehen sind und die Zahl der 14 Nachbarpunkte stets erhalten bleibt. Jedes entartete Punktgitter läßt sich so auf verschiedene Weisen entstanden denken.

Die Ergebnisse des § 9 lassen sich im sechsdimensionalen Raume der Koeffizienten deuten. Die Übergänge von den Koeffizienten von Q zu denen von S oder T bedeuten nur eine affine Transformation im sechsdimensionalen Raume, spielen also keine Rolle. Die definiten Formen, ebenso die reduzierten Formen reproduzieren sich durch Addition und Multiplikation mit positiven Konstanten, erfüllen also einen vom Nullpunkt ausgehenden konvexen Kegel. Dasselbe gilt von den Formen, die (106) genügen. Minkowski hat durch (176) gezeigt, daß die definiten Formen

$$D(Q) \geqq \text{konst.} \tag{264}$$

im Koeffizientenraum einen sich ins Unendliche erstreckenden konvexen Körper bilden, der den Nullpunkt nicht enthält. Für (264) kann man auch schreiben

$$\sqrt[n]{D(Q)} \geqq \text{konst.}$$

$\sqrt[n]{D(Q)}$ ist das Quadrat der Kantenlänge eines Würfels, dessen Volumen gleich dem des Elementarparallelepipeds ist, der kurz Elementarwürfel

heißen möge. Es war K das Quadrat des Radius einer Kugel, die durch vier Gitterpunkte geht, die das Gitter erzeugen, oder der Umkugel des von ihnen erzeugten Tetraeders. Die Formen

$$K \leqq \text{konst.}$$

bilden nach (173) im Koeffizientenraum einen bis zum Nullpunkt reichenden konvexen Körper.

Um (173) zu veranschaulichen, denke man sich $y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'$ als rechtwinklige Koordinaten eines sechsdimensionalen Raumes. Die von y_1, y_2, y_3 einerseits und y_1', y_2', y_3' andererseits erzeugten dreidimensionalen Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ stehen aufeinander senkrecht, d. h. jede Strecke in $\mathfrak{R}$ steht senkrecht auf jeder Strecke in $\mathfrak{R}'$. Es wird durch Q ein Punktgitter in $\mathfrak{R}$, durch Q' ein Punktgitter in $\mathfrak{R}'$ dargestellt. Es seien A, B, C, D vier nicht in einer Ebene liegende Gitterpunkte des Punktgitters in $\mathfrak{R}$, die das Gitter erzeugen, ebenso A', B', C', D' in $\mathfrak{R}'$. Legt man durch A einen dreidimensionalen Raum parallel zu $\mathfrak{R}'$, ebenso durch A' parallel zu $\mathfrak{R}$, so haben diese den Punkt A'' gemeinsam, dessen sechs Koordinaten die drei Koordinaten von A in $\mathfrak{R}$ und die drei Koordinaten von A' in $\mathfrak{R}'$ sind. Ebenso konstruiere man B'', C'', D''. Die Punkte A'', B'', C'', D'' bestimmen einen dreidimensionalen Raum $\mathfrak{R}''$ und in diesem ein Punktgitter, dessen Quadrate der Entfernungen durch die quadratische Form Q'' bestimmt werden. Es gilt (168). Es sei M der Umkugelmittelpunkt von A, B, C, D, ebenso M' von A', B', C', D'; M'' sei der aus M und M' durch die obige Parallelkonstruktion gefundene Punkt. N'' sei der Umkugelpunkt von A'', B'', C'', D''. N und N' seien die Projektionen von N'' auf die Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ nach der Umkehrung der obigen Konstruktion. Die Umkugelradien seien r, r', r''. Es steht die Strecke $N''M''$ senkrecht auf dem Raume $\mathfrak{R}''$. Es ist

$$\begin{aligned} r^2 + r'^2 &= [MA]^2 + [M'A']^2 = [M''A'']^2 \\ &= [M''N'']^2 + [N''A'']^2 = [M''N'']^2 + r''^2 \geqq r''^2. \end{aligned}$$

Das ist aber (173). Der arithmetische Beweis (168) bis (173) hat eine etwas andere Bedeutung. Es sei P'' ein Punkt in $\mathfrak{R}''$, P und P' seine Projektionen in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$. Es bedeute $p(P)$ die Potenz von P in bezug auf die Kugel um M, also

$$p(P) = [PM]^2 - r^2,$$

ebenso

$$p'(P') = [P'M']^2 - r'^2,$$

$$p''(P'') = [P''N''] - r''^2.$$

Die Gleichung in (171), die arithmetisch selbstverständlich ist, bedeutet also

$$p(P) + p'(P') = p''(P'').$$

Das läßt sich geometrisch folgendermaßen einsehen:

$$\begin{aligned} p(P)+p'(P') &= \{[PM]^2-[MA]^2\}+\{[P'M']^2-[M'A']^2\} \\ &= [P''M'']^2-[M''A'']^2 \\ &= \{[P''N'']^2+[M''N'']^2\}-\{[A''N'']^2+[M''N'']^2\} \\ &= [P''N'']^2-[A''N'']^2 = p''(P''). \end{aligned}$$

Setzt man speziell $P''=N''$, so wird

$$-[A''N'']^2 = \{[NM]^2-[MA]^2\}+\{[N'M']^2-[M'A']^2\},$$

also

$$-r''^2 \geqq -r^2-r'^2.$$

Sind zwei Gitter so aufeinander bezogen, daß benachbarte Gitterpunkte benachbarten zugeordnet sind, so möge die Zuordnung gleichwabig heißen. Nach (174) reproduzieren sich gleichwabige Formen durch Addition, erfüllen also einen konvexen Kegel im Koeffizientenraum. Der Kegel der definiten Formen zerfällt in unendlich viele Kegel gleichwabiger Formen. Bei der Addition gleichwabiger Formen läßt sich (173) auf die relativen Maxima der Wabenwerte, also auch auf den maximalen Wabenwert anwenden, (175). Der Quotient

$$\frac{\text{maximaler Wabenwert}}{\text{Quadrat der Kante des Elementarwürfels}} = \varepsilon(Q)$$

möge die Wabenexzentrizität des Gitters heißen. Geometrisch ähnliche Gitter besitzen die gleiche Wabenexzentrizität. Im Koeffizientenraum bilden die gleichwabigen Formen

$$\varepsilon(Q) \leqq \text{konst.}$$

nach (179), (181) einen konvexen Kegel mit der Spitze im Nullpunkte, der im Kegel aller zu ihnen gleichwabigen Formen enthalten ist. Die kleinste Wabenexzentrizität, die (184) angibt, besitzt das Gitter, das aus dem Würfelgitter durch Hinzunahme der Würfelmittelpunkte entsteht. Die zugehörige Wabenzelle heiße regulär; sie wird begrenzt von 6 Quadraten und 8 regulären Sechsecken. Die Betrachtungen in der Ebene sind völlig analog. Die kleinste Wabenexzentrizität (187) besitzt das aus dem gleichzeitigem Dreieck erzeugte ebene Punktgitter, dessen Wabenzelle ein reguläres Sechseck ist.

§ 2.

Die geometrische Interpretation des Minkowskischen Satzes ist folgende:

Es bedeuten $y_\varkappa$ rechtwinklige Koordinaten im dreidimensionalen Raume. (1) definiert ein Punktgitter, zu dem der Nullpunkt gehört. Die Punkte

(265) $$|\prod_\varkappa \eta_\varkappa| \leqq \text{konst.}$$

liegen zwischen den, zusammen acht, Schalen der beiden Flächen dritter Ordnung

$$(266) \qquad \prod_{\varkappa} \eta_{\varkappa} = \text{konst.}$$

und

$$(267) \qquad -\prod_{\varkappa} \eta_{\varkappa} = \text{konst.},$$

die die Koordinatenebenen zu Asymptotenebenen haben. Das Gebiet (265) möge kurz als Hyperbelgebilde bezeichnet werden. Das entsprechende Gebiet der Ebene, das zwischen den, zusammen vier, Zweigen der beiden (266) und (267) entsprechenden Hyperbeln liegt, heiße auch Hyperbelkreuz. Ein achsenparalleles Quader, d. h. dessen Kanten den Koordinatachsen parallel sind, und dessen Inhalt gleich dem des Elementarparallelepipeds, heiße Elementarquader. Ebenso sei von jetzt an der Elementarwürfel definiert. Der geometrische Ort der Ecken der Elementarquader, die den Nullpunkt zum Mittelpunkt haben, bilden die Oberfläche des Elementarhyperbelgebildes mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Die zu beweisende Beziehung (188) bedeutet:

Hauptsatz I: *Jeder Punkt des Raumes liegt innerhalb eines Elementarhyperbelgebildes, das einen Gitterpunkt zum Mittelpunkte hat.*

Oder anders ausgedrückt:

Satz Ia: *Die Elementarhyperbelgebilde, die die Gitterpunkte eines Punktgitters zu Mittelpunkten haben, erfüllen den Raum lückenlos.*

Jeder Raumpunkt liegt im Innern eines solchen Elementarhyperbelgebildes mit Ausnahme des Falles, daß das Elementarparallelepiped selbst als achsenparalleles Quader gewählt werden kann. Dann liegen die Mittelpunkte dieser Elementarparallelepipede *nur* auf den *Oberflächen* der Elementarhyperbelgebilde, die die acht Eckgitterpunkte zu Mittelpunkten haben.

Dilatationen in Richtung der Koordinatenachsen (Verlängerung oder Verkürzung der y_1-Koordinaten in gleichem Verhältnis, ebenso der y_2- und der y_3-Koordinaten) ändern die Gestalt eines Hyperbelgebildes nicht. Ich will im folgenden kurz von „Dilatation" sprechen und meine „in Richtung der Koordinatenachsen". Bei gleichzeitiger Dilatation des Gitters und seiner Elementarhyperbelgebilde bleibt diese Beziehung erhalten. Ist der Hauptsatz also für irgendein Gitter bewiesen, so gilt er für jedes daraus durch Dilatation entstandene Gitter. Die Umkugel des Elementarwürfels heiße Elementarkugel. Die Anwendung des Satzes vom arithmetischen und geometrischen Mittel in (191) bedeutet:

Satz II: *Für einen festen Punkt, z. B. den Nullpunkt, als Mittelpunkt ist die Elementarkugel im Elementarhyperbelgebilde enthalten.*

Es wird also der Hauptsatz bewiesen sein, wenn es gelingt, zu zeigen, *daß die Elementarkugeln um die Gitterpunkte als Mittelpunkte bereits den Raum lückenlos erfüllen* (Eigenschaft III).

Das ist aber eine rein geometrische, von den Koordinatenachsen unabhängige Eigenschaft. Sie kann aber nicht mehr für jedes beliebige Gitter gezeigt werden, sondern es bedarf dazu einer Vorbereitung. Es soll nämlich bewiesen werden, daß jedes Gitter durch Dilatation in ein Gitter mit der Eigenschaft III übergeführt werden kann. Hierzu wird zunächst gezeigt, daß jedes Gitter durch Dilatation in ein Gitter übergeführt werden kann, *dessen drei bei der Reduktion auftretende kürzeste Strecken zwischen Gitterpunkten, die nicht in einer Ebene liegen, einander gleich sind* (Eigenschaft IV). Drei solche Strecken erzeugen, wie in § 1 dieses Kapitels gezeigt wurde, ein Elementarparallelepiped. *Seine sämtlichen 12 Kanten sind einander gleich, seine Seitenflächen sind Rhomben. Die Raum- und Flächendiagonalen sind größer oder gleich den Kanten* (Eigenschaft V). Die Reduktionsbedingungen ergeben übrigens, daß, wenn ein Elementarparallelepiped die Eigenschaft V besitzt, es ein reduziertes Elementarparallelepiped ist, d. h. daß das Gitter die Eigenschaft IV besitzt. Das entsprechende Elementarparallelogramm in der Ebene ist ein Rhombus, dessen Diagonalen größer oder gleich den Seiten sind, dessen Winkel also zwischen 60^0 und 120^0 liegen.

Um ein beliebiges Gitter durch Dilatation in ein solches mit der Eigenschaft IV zu verwandeln, denke man sich alle Koordinaten quadriert, so daß also alle „quadrierten Gitterpunkte“ in den positiven Oktanten fallen. Man betrachte den kleinsten konvexen Bereich, der diese sämtlichen quadrierten Gitterpunkte enthält, und wähle eine Ebene, die ein Stück seiner Oberfläche enthält. Dieser Ebene entspricht im Raume des Punktgitters selbst ein Ellipsoid mit den Koordinatenachsen als Hauptachsen, das außer dem Nullpunkt keinen Gitterpunkt in seinem Innern enthält und drei Paare entgegengesetzter Gitterpunkte auf seiner Oberfläche. Eine andere Fläche zweiten Grades um den Nullpunkt als Mittelpunkt kann dieser Ebene nicht entsprechen. Denn dann gäbe es einen konvexen Körper um den Nullpunkt als Mittelpunkt, der von weiteren Gitterpunkten frei ist, mit beliebig großem Volumen. Ein solcher Körper besitzt aber nach einem Minkowskischen Satze höchstens das achtfache Volumen des Elementarparallelepipeds. Im ersten Kapitel ist dieser Satz, um nicht unnötig Integrale einzuführen und den Boden der Elementarmathematik zu verlassen, nicht auf das Ellipsoid, sondern nur auf das dem Ellipsoid eingeschriebene achsenparallele Quader mit den Hauptachsen proportionalen Kanten angewendet worden.

Es kann nun aber der Fall eintreten, daß die sechs Gitterpunkte auf der Oberfläche des Ellipsoids in einer Ebene liegen. Es ist zu zeigen, daß durch passende Wahl des Ellipsoids dieser Fall vermieden werden kann. Es sei [0] der Nullpunkt, [1], [1′] entgegengesetzte Punkte, ebenso [2], [2′]; [3], [3′]. Die sieben Punkte mögen in einer Ebene liegen. Dann müssen [0], [1], [2] das ganze Gitter erzeugen, soweit es in der Ebene liegt; denn andernfalls gäbe es im Dreieck [0], [1], [2] oder [0] [1′] [2′] einen von den Ecken verschiedenen Gitterpunkt, der im Innern des Ellipsoids läge. Die sechs Punkte [1], [2], [3], [1′], [2′], [3′] bilden also ein Sechseck mit Mittelpunkt, dessen Hauptdiagonalen parallel und doppelt so lang sind wie die nicht anliegenden Seiten. Man kann übrigens auch so schließen: verwandelt man das Ellipsoid durch Dilatation in eine Kugel, so sollen sechs Gitterpunkte auf einem größten Kreise liegen und voneinander mindestens um den Kugelradius entfernt sein. Dann müssen sie ein reguläres Sechseck bilden. Das ursprüngliche Sechseck entsteht also durch Dilatation aus einem regulären. Wenn [0], [1], [2], [1′], [2′] gegeben sind, lassen sich [3], [3′] nur auf zweierlei Art finden. Die beiden möglichen Paare mögen [3], [3′] und [4], [4′] heißen. [3] [4] [3′] [4′] bilden ein Parallelogramm, dessen Seiten von den Punkten [1], [2], [1′], [2′] halbiert werden. Die Ebene dieser Punkte, die durch den Nullpunkt geht, geht durch 6 von den 8 Oktanten. Es müssen also in einem Oktanten zwei Punkte liegen. Würde man beim Übergang zum anstoßenden Ellipsoid immer wieder auf den zu vermeidenden Fall kommen, so erhielte man durch geometrische Addition der Vektoren vom Nullpunkt aus einen dritten Punkt im selben Oktanten mit durchweg größeren Koordinaten. Die Verbindungslinie dieses Punktes mit einem der erzeugenden Punkte würden im „quadrierten“ Raume im Oktanten ins Unendliche laufen. Sie läge andererseits in dem der Oberfläche des Ellipsoids entsprechenden Stück einer Ebene, das durch die Koordinatenebenen ringsum begrenzt wird. Man erhält also einen Widerspruch. Also kann man durch fortgesetzten Übergang zum anstoßenden Oberflächenstück eines Ellipsoids den Fall der Ebene im ursprünglichen Raum stets vermeiden. Man erhält also ein Ellipsoid, auf dessen Oberfläche drei Paare entgegengesetzter Gitterpunkte liegen, die nicht in einer Ebene liegen. Dies Ellipsoid verwandle man durch Dilatation in eine Kugel. Das so entstehende Gitter hat die Eigenschaft IV.

Die behandelte Schwierigkeit tritt in der Ebene noch nicht auf, da eine Ellipse von einer Geraden, die durch ihren Mittelpunkt geht, nur in zwei Punkten geschnitten wird. Das Verfahren liefert also stets eine Ellipse, auf deren Rand zwei Paar entgegengesetzter Gitterpunkte liegen. Durch Dilatation wird diese Ellipse in einen Kreis verwandelt. Das so entstehende Gitter hat die Eigenschaft IV.

Es soll gezeigt werden, daß jedes Gitter mit der Eigenschaft IV die Eigenschaft III besitzt. Die Eigenschaft III bedeutet aber: „*Die größte Entfernung eines Raumpunktes von einem Gitterpunkt ist höchstens die halbe Diagonale des Elementarwürfels*," oder:

„*Die Wabenexzentrizität des Gitters ist kleiner oder gleich* $\frac{3}{4}$ (*für die Ebene* $\frac{1}{2}$)." (Eigenschaft IIIa.)

Verzichtet man auf die feinere Theorie der Wabenzellen, begnügt man sich mit der roheren Abschätzung des maximalen Wabenwerts durch die Einteilung des Raumes in Quader, und nimmt man das Gaußsche Ergebnis hinzu, daß das Volumen des reduzierten Elementarparallelepipeds mindestens das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache des Quaders mit gleichen Kanten ist, so erhält man das ungenauere Ergebnis (231) (entsprechend für die Ebene (233)).

Die reduzierten Formen mit der Eigenschaft IV bilden im sechsdimensionalen Koeffizientenraume einen vierdimensionalen konvexen Kegel. Die reduzierten Formen mit lauter positiven bzw. lauter negativen Koeffizienten außerhalb der Hauptdiagonale oder drei spitzen bzw. drei stumpfen Winkeln des Elementarparallelepipeds im Nullpunkte bilden je einen konvexen Teilkegel dieses Kegels. Von diesen Kegeln soll gezeigt werden, daß sie im sechsdimensionalen Kegel enthalten sind, für den die Wabenexzentrizität kleiner oder gleich $\frac{3}{4}$. Wie die Rechnung des § 4 des vorigen Kapitels ergibt, haben beide Kegel nur endlich viele Kanten. Die Kantenformen sind unter (245) bis (251) enthalten. (248) und (250) liefern das Würfelgitter, und zwar entsprechen sie den beiden möglichen geometrisch verschiedenen Einteilungen des Würfelgitters in Nachbartetraeder. Für das Würfelgitter ist die Eigenschaft IIIa selbstverständlich. Den 24 verschiedenen Permutationen der Indizes p und q entsprechen die Permutationen der Hauptkanten und ihre Richtungsumkehrungen, wobei eine zentrosymmetrische Umkehrung aller Richtungen keine Permutation hervorruft. (245), (246), (249) entsprechen dem aus den Ecken des regulären Tetraeders erzeugten Gitter, dessen Wabenzellen Rhombendodekaeder sind, das im Koeffizientenraume im Innern eines konvexen Kegels liegt, der von Punkten erzeugt wird, die dem Würfelgitter entsprechen. Für dies Gitter braucht also die Eigenschaft IIIa nicht durch direkte Rechnung festgestellt zu werden. Das ist nur nötig für das Gitter, das von den Ecken eines dreiseitigen Prismas mit gleichseitiger Basis und quadratischen Seitenflächen erzeugt wird und den Formen (247) und (251) entspricht. Die Rechnung ist in (255) bis (261) ausgeführt, und zwar ist in (258) und (259) benutzt, daß der Umkugelmittelpunkt, Umkreismittelpunkt der Grundfläche und eine ihrer Ecken ein rechtwinkliges Dreieck bilden mit dem Umkugelradius als Hypotenuse und der halben Höhe und dem Umkreisradius der Grundfläche als Katheten.

Für das ebene Problem tritt die Notwendigkeit einer direkten Berechnung nicht auf; im dreidimensionalen Koeffizientenraum enthält der konvexe Kegel, der von den Punkten erzeugt wird, die den Quadratgittern entsprechen, den zweidimensionalen Kegel, der den Gittern mit reduziertem rhombischem Elementarparallelogramm entspricht.

Für jedes Gitter von der Eigenschaft IV ist die Eigenschaft IIIa, also die Eigenschaft III bewiesen; also gilt für dies Gitter nach Satz II der Hauptsatz I, d. h., da bereits die Elementarkugeln um die Gitterpunkte als Mittelpunkte den Raum lückenlos erfüllen, tun dies erst recht die Elementarhyperbelgebilde, die die Elementarkugeln enthalten. Wenn aber Satz I für ein Gitter gilt, so gilt er für jedes durch Dilatation daraus entstehende Gitter. Jedes Gitter konnte aber in ein Gitter mit der Eigenschaft IV übergeführt werden. Also gilt der Hauptsatz I für jedes Gitter. Die Bedeckung nur durch einen Randpunkt und nicht durch einen inneren Punkt kann unter den Gittern von der Eigenschaft IV nur vorkommen für das Würfelgitter und für die Zellecken, das sind die Mittelpunkte der würfelförmigen Elementarparallelepipede. Nur wenn das Würfelgitter parallel den Koordinatenachsen orientiert ist, fallen die entsprechenden Randpunkte der Elementarkugeln auf den Rand der Elementarhyperbelgebilde, findet also im Hauptsatz der Ausnahmefall der Überdeckung nur durch den Rand statt. Dem entspricht der Fall, daß das gegebene Gitter als Elementarparallelepiped ein achsenparalleles Quader hat.

Das Analoge gilt in der Ebene, wenn man an Stelle von „Würfel, Quader, Kugel, Hyperbelgebilde“ bzw. setzt „Quadrat, Rechteck, Kreis, Hyperbelkreuz“.

(Eingegangen am 6. Oktober 1921.)

Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen.

Von

E. Study in Bonn.

Teil II.

Inhalt.

§ 5. Involutorische Transformationen.
§ 6. Fortsetzung. Einige Anwendungen.
§ 7. Bilineare Formen, deren Argumente Quaternionen sind.

§ 5.

Involutorische Transformationen.

Wir betrachten jetzt wieder nur reelle Figuren, und zwar wollen wir dazu übergehen, die (gegenüber G_{15}, H_{15} oder Γ_{15}, H_{15}) invarianten Eigenschaften einiger geometrischer Gebilde zu untersuchen. Diese *Objekte* unserer Transformationen entnehmen wir einer besonderen Gattung dieser Transformationen selbst. Es sollen die involutorischen Transformationen der Gruppe sein, die also, die nach zweimaliger Anwendung zur identischen Transformation führen, aber von ihr verschieden sind. Sie gehören zu den einfachsten unter den Figuren, denen man in der Geometrie der konformen Transformationen begegnet, und sie haben aus mehreren Gründen ein besonderes Interesse. Einmal nämlich lassen sich schon aus einigen unter ihnen alle konformen Transformationen zusammensetzen — worauf hier nicht eingegangen werden soll —, dann aber hängt ihre Theorie mit der Theorie gewisser Untergruppen der Gruppe Γ_{15}, H_{15} zusammen, wovon später die Rede sein wird.

Zuerst wollen wir uns eine Übersicht über alle möglichen Fälle verschaffen.

Leicht überzeugt man sich davon (ohne etwa auf die Theorie der Elementarteiler Bezug zu nehmen!), daß in jedem projektiven Kontinuum

die involutorischen Kollineationen bei passender Koordinatenwahl durch Vorzeichenwechsel einiger Koordinaten ausgedrückt werden können. Soll eine solche Transformation eine nicht-singuläre quadratische Mannigfaltigkeit M_n^2 in Ruhe lassen, so muß das Paar der beiden linearen Räume, die bei der Transformation punktweise in Ruhe bleiben, bei der involutorischen Korrelation in Ruhe bleiben, die zu der quadratischen Mannigfaltigkeit gehört. Diese *Inzidenzgebiete* der Transformation müssen also entweder ganz auf der quadratischen Mannigfaltigkeit liegen und gleiche Dimensionenzahlen haben (was nur bei geraden Werten der Stufenzahl $n+2$ eintreten kann), oder sie müssen durch die genannte involutorische Transformation miteinander vertauscht werden. Sie stehen dann in der bekannten Beziehung von *Pol und Polare*.

Hier ist nun $n+2=6$ und die zu betrachtende M_4^2 hat den Trägheitsindex 1. Die beiden Inzidenzgebiete müßten im ersten Falle Ebenen sein, die auf der M_4^2 liegen. Solcher Ebenen gibt es zwei reelle Scharen von je $\infty^{2\cdot 3}$ Exemplaren (analog den $\infty^{2\cdot 3}$ Linienbündeln und Linienfeldern der projektiven Geometrie des R_3), aber keine enthält reelle Ebenen (vgl. § 1). Die konjugiert-imaginäre Ebene zu irgendeiner gegebenen liegt mit ihr in derselben Schar und trifft sie in einem reellen Punkt. Zwei solche Ebenen können aber nicht zu einer involutorischen Kollineation als Inzidenzgebiete gehören (die natürlich ganz getrennt sein müssen). Die involutorischen Transformationen der ersten Art haben also ihre Inzidenzebenen in verschiedenen Scharen, und sie sind folglich alle imaginär[31]). Sie scheiden hier aus.

Was übrigbleibt, sind die reellen automorphen involutorischen Kollineationen der M_4^2 mit zueinander polaren Inzidenzgebieten. Ist ein solches Inzidenzgebiet nicht ein Punkt, so kann es doch sein, daß es die M_4^2 im Reellen gar nicht trifft. Die Schnittfigur dürfen wir dann nicht imaginär nennen, da ihre Punkte immer paarweise konjugiert-imaginär sein werden. Wir wählen also andere Worte zur Unterscheidung der zwei möglichen Fälle, *ideal* und *real*.

Nehmen wir noch die naheliegende Bemerkung hinzu, daß alle linearen Punktmannigfaltigkeiten in R_5, die gleiche Dimensionenzahlen haben und sich in bezug auf die eben angeführte Unterscheidung gleich verhalten, in bezug auf die Gruppe G_{15} (also im engsten hier in Betracht kommenden Sinne) miteinander äquivalent sind, so erhalten wir ohne

[31]) Hier ist vielleicht etwas mehr vorausgesetzt worden als was allen Geometern geläufig ist. Wir werden aber nachher die reellen involutorischen Transformationen der Gruppe Γ_{15}, H_{15} unabhängig von dieser Betrachtung bestimmen, und so wird keine empfindliche Lücke bestehen bleiben. Übrigens kann man das im Texte Gesagte ziemlich elementar mit Hilfe der stereographischen Projektion beweisen.

weiteres eine Klassifikation aller reellen involutorischen Transformationen der Gruppe G_{15}, H_{15} oder Γ_{15}, H_{15}, und auch, für ein passend gewähltes Individuum aus jeder Klasse, eine sehr einfache Darstellung mit Hilfe der Quaternionen.

Ich gehe sogleich zur Aufzählung der verschiedenen Möglichkeiten über. Die Inzidenzgebiete, oder vielmehr ihre Durchschnitte mit der M_4^2, werden sich nicht in allen Fällen durch Gleichungen zwischen den vier Koordinaten z_0, z_1, z_2, z_3 erschöpfend darstellen lassen, und in zwei Fällen überhaupt nicht (§ 4 S. 31). Das letzte tritt dann ein, wenn für alle Punkte des einzelnen Inzidenzgebietes $Z_\alpha + Z_\alpha = 0$ ist. Wo aber eine Darstellung der punktweise in Ruhe bleibenden Punktmannigfaltigkeiten durch Quaternionengleichungen möglich ist, da wird sie in [ ] angegeben werden.

Die besprochenen Inzidenzgebiete werden immer von solchen linearen Mannigfaltigkeiten gebildet, die die M_4^2 nicht berühren, ihre Schnittfiguren mit der M_4^2 sind also nicht singulär. Nach absteigenden Dimensionenzahlen geordnet sind es reale oder ideale *Sphären* (M_3^2), *Kugeln* (M_2^2), *Kreise* (M_1^2) und *Punktepaare*, und zwar Paare verschiedener Punkte. Ein jedes solche reelle Punktepaar besteht aus zwei getrennten reellen, ein ideales aus zwei konjugiert-imaginären Punkten des sphärischen Kontinuums M_4^2. Im Möbiusschen Kontinuum gehören zu den realen Kreisen, Kugeln, Sphären auch sämtliche reellen Geraden, Ebenen, „Flache". *Flach* wollen wir nämlich einen ebenen R_3 nennen. Alle diese Punktmannigfaltigkeiten sind im Reellen durch den uneigentlichen Punkt abgeschlossen: Sie sind selbst Möbiussche Kontinua niederer Dimension.

Punktepaare und nicht singuläre Kugeln, sowie je zwei nicht singuläre Kreise sind als *reziproke Figuren* einander zugeordnet. Von zwei solchen reziproken Figuren ist, wenn sie reell sind, immer eine real und eine ideal. Beide bestehen aus Inzidenzpunkten einer involutorischen konformen Transformation. Ist x ein Punkt der einen und y ein Punkt der anderen, so liegt die Verbindungslinie von beiden ganz auf der M_4^2, und wenn es zugehörige (eigentliche) Quaternionen gibt, so ist $N(y-x)=0$ (s. Nr. 66).

Genauer werden wir überall nur *reelle Figuren* betrachten.

I. Inversionen oder Spiegelungen an Sphären.

$2\cdot\infty^5$ uneigentliche Transformationen. Beispiel:

$$(\mathsf{A}_1) \qquad \boxed{\tilde{z}+z'=0}.$$

Spiegelung an der realen Sphäre, deren Gleichung $Z_0=0$ ist [$\tilde{z}+z=0$], (und an ihrem Pol, der außerhalb der M_4^2 liegt). Ein anderes Beispiel

aus derselben Klasse äquivalenter Figuren erhält man, wenn man auf (A_1) etwa die eine oder andere der involutorischen Transformationen

$$(z+1)(z'+1)-2=0, \quad (\tilde{z}+1)(z'+1)-2=0$$

ausübt:

(A_2) $$\boxed{\tilde{z}z'-1=0}.$$

Dies ist die Spiegelung an der realen Sphäre $Z_\omega = 0$ (und ihrem Pol); $[\tilde{z}z-1=0]$.

(B) $$\boxed{\tilde{z}z'+1=0}.$$

Dies ist die Spiegelung an der idealen Sphäre $Z_\alpha = 0$ (und ihrem innerhalb der M_4^3 gelegenen Pol). Reelle Inzidenzpunkte, also reelle Lösungen der Gleichung $\tilde{z}z+1=0$ gibt es nicht.

Aus Transformationen der aufgezählten zwei Arten oder Klassen von Inversionen I A, B lassen sich die nunmehr unter II und III zu nennenden involutorischen Transformationen zusammensetzen, und zwar die Transformationen II aus zwei, und die Transformationen III aus drei miteinander vertauschbaren Inversionen.

II. Involutionen oder Spiegelungen an Punktepaaren und Kugeln.

$2\cdot\infty^8$ eigentliche Transformationen.

(A_1) $$\boxed{z+z'=0}.$$

Spiegelung an der idealen Kugel $Z_\alpha = 0$, $Z_\omega = 0\,[*]$, und an dem realen Punktepaar $Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ $[z = 0, \infty]$. Äquivalent damit ist

(A_2) $$\boxed{zz'-1=0}.$$

Spiegelung an der idealen Kugel $Z_\alpha = 0$, $Z_0 = 0$ $[\tilde{z}z+1=0,\ \tilde{z}+z=0]$ und dem realen Punktepaar $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_\omega = 0$ $[z = \pm 1]$. Umgekehrt verhält sich

(B) $$\boxed{zz'+1=0}.$$

Spiegelung an der realen Kugel $Z_0 = 0$, $Z_\omega = 0$ $[\tilde{z}z-1=0,\ \tilde{z}+z=0]$ und dem idealen Punktepaar $Z_\alpha = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ $[z = \pm i]$.

III. Spiegelungen an Paaren von Kreisen.

Hier gibt es nur eine einzige Schar (ein Kontinuum) von ∞^9 uneigentlichen Transformationen. Von den zwei zueinander reziproken reellen Kreisen ist immer einer real und einer ideal.

$$\boxed{\tilde{z} - z' = 0}$$

kann als Repräsentant der ganzen Klasse gewählt werden. Spiegelung an dem realen Kreise $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ $[\tilde{z} - z = 0]$ und an dem idealen Kreise $Z_\alpha = Z_0 = Z_\omega = 0$ [*].

Die in zwei Fällen benutzten Zeichen [*] deuten an, daß die zugehörigen Inzidenzmannigfaltigkeiten ganz in das akzessorische Gebiet fallen, das durch Koordinaten z_0, z_1, z_2, z_3 nicht darstellbar ist (S. 31). Im erweiterten Möbiusschen Kontinuum aber, das eben erst mit Hilfe der Koordinaten $Z_\alpha \ldots Z_\omega$ und der Gleichung (55) erschöpfend beschrieben werden kann, sind sie nachweisbar und nachgewiesen.

Nachdem wir uns hiermit, durch Angabe von Repräsentanten, eine Übersicht über die verschiedenen Klassen untereinander (gegenüber G_{15} oder Γ_{15}) *äquivalenter* involutorischer Möbiusscher Transformationen verschafft haben, wenden wir uns nun zur Untersuchung der Individuen jeder Klasse. Wir beginnen mit den beiden Klassen II, deren Transformationen wir, da sie die unmittelbare Verallgemeinerung der sonst so genannten Involutionen sind, ebenfalls mit diesem Wort bezeichnet hatten.

Eigentliche involutorische Transformationen.

Für die Involutionen bestehen, nach dem früher Vorgetragenen, Gleichungen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \Delta_l & 0 \\ 0 & \Delta_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \Delta_r & 0 \\ 0 & \Delta_r \end{pmatrix}, \tag{73}$$

wo Δ_l und Δ_r irgendwelche von Null verschiedene (hier reelle) numerische Quaternionen sind. Gleichungen dieser Form genügt aber auch die identische Transformation. Es ist also auszuschließen, daß $a = d$ und numerisch und zugleich $b = c = 0$ ist.

Es ergibt sich dann aus (73), daß

$$\begin{aligned} \Delta_l &= \begin{cases} = aa + bc = \tilde{a}\tilde{a} + \tilde{c}\tilde{b}, \\ = cb + dd = \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{d}\tilde{d}, \end{cases} \\ \Delta_r &= \begin{cases} = \alpha\alpha + \gamma\beta = \tilde{\alpha}\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\tilde{\gamma}, \\ = \beta\gamma + \delta\delta = \tilde{\gamma}\tilde{\beta} + \tilde{\delta}\tilde{\delta} \end{cases} \end{aligned} \tag{74}$$

ist. Ferner folgt, daß z. B.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \Delta_l^{-1} a, & \Delta_l^{-1} b \\ \Delta_l^{-1} c, & \Delta_l^{-1} d \end{pmatrix}$$

reziproke Matrizen sind. Aber nach (33) sind, wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ verschwistert sind, auch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}' \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \delta, & -\beta, \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}$$

reziproke Matrizes. Es ergibt sich demnach, daß man im vorliegenden Falle die Gleichungen (35) und (36) durch solche von einfacherem Bau ersetzen kann:

$$\begin{aligned} d &= \Delta_l \cdot \alpha, & -c &= \Delta_l \cdot \gamma, \\ -b &= \Delta_l \cdot \beta, & a &= \Delta_l \cdot \delta, \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} \Delta_r \cdot a &= \delta, & \Delta_r \cdot b &= -\beta, \\ \Delta_r \cdot c &= -\gamma, & \Delta_r \cdot d &= \alpha. \end{aligned} \tag{76}$$

Die Gleichungen

$$\frac{az+b}{cz+d} = z', \qquad \frac{zd-b}{zc+a} = z' \tag{77}$$

stellen also jetzt dieselbe Transformation dar, was wegen des involutorischen Charakters dieser Transformation auch unmittelbar aus (37) hervorgeht. An Stelle der beiden Nablafunktionen ∇_l und ∇_r sind hier die noch einfacher gebildeten Funktionen Δ_l und Δ_r getreten, die nach (75) und (76) ebenfalls durch die Gleichung

$$\Delta_l \cdot \Delta_r = 1 \tag{78}$$

verbunden sind und, nach (73), quadriert die beiden Nablafunktionen liefern:

$$\boxed{\nabla_l = \Delta_l^2, \quad \nabla_r = \Delta_r^2}. \tag{79}$$

(Die Gleichungen (73) ergeben zwar unmittelbar nur $\nabla_l^2 = \Delta_l^4$, $\nabla_r^2 = \Delta_r^4$. Hieraus aber folgen für das reelle Gebiet, da darin $\nabla_l > 0$, $\nabla_r > 0$ ist, die Gleichungen (79), und das genügt, um ihre Allgemeingültigkeit zu sichern.)

Es frage sich jetzt, wie man z. B. die Gleichungen links in (73) auf allgemeinste Weise erfüllen kann (so, daß $\Delta_l \neq 0$ wird).

Hierzu gelangen wir, wenn wir von der Bemerkung ausgehen, daß jedenfalls die Quaternionengleichung $z + z' = 0$ eine Involution darstellt (siehe oben, II A_1). Also wird, wenn p und q irgend zwei verschiedene Quaternionen ($\neq \infty$) bedeuten, auch die Gleichung

$$\frac{z-p}{z-q} + \frac{z'-p}{z'-q} = 0$$

eine Involution darstellen. Es ist aber

$$\frac{z'-p}{z'-q} = \frac{(z'-p)(\tilde{p}-\tilde{q})}{(z'-q)(\tilde{p}-\tilde{q})};$$

somit erhalten wir

$$(80) \qquad \boxed{(z'-p)(\tilde{p}-\tilde{q})(z-q)+(z'-q)(\tilde{p}-\tilde{q})(z-p)=0},$$

worin man noch, nach Belieben, z und z' vertauschen kann.

Hieraus folgt, wenn $\Re$ einen zunächst unbestimmten numerischen Faktor $(\neq 0)$ bedeutet, daß in diesem Falle

$$(81) \qquad \begin{aligned} &\Re\cdot a = (p+q)(\tilde{p}-\tilde{q}),\\ &\Re\cdot b = -2p(\tilde{p}-\tilde{q})q = -2q(\tilde{p}-\tilde{q})p,\\ &\Re\cdot c = 2(\tilde{p}-\tilde{q}) \qquad\qquad \{\neq 0\},\\ &\Re\cdot d = -(\tilde{p}-\tilde{q})(p+q) \end{aligned}$$

gesetzt werden kann. Der Faktor $\Re$ aber kann nicht willkürlich sein, wenn umgekehrt p und q sich durch a, b, c, d sollen ausdrücken lassen. In der Tat findet sich unmittelbar

$$\Re^2\cdot\Delta_l = \left\{\begin{matrix}(p+q)(\tilde{p}-\tilde{q})(p+q)- \\ -2p(\tilde{p}-\tilde{q})q-2q(\tilde{p}-\tilde{q})p\end{matrix}\right\}\cdot(\tilde{p}-\tilde{q}) =$$

$$= (p-q)(\tilde{p}-\tilde{q})(p-q)\cdot(\tilde{p}-\tilde{q}) = N(p-q)^2 = \frac{1}{16}\Re^4\cdot(c\tilde{c})^2,$$

also

$$(82) \qquad \Re = \frac{4\sqrt{\Delta_l}}{c\tilde{c}}.$$

Nun folgt weiter

$$\frac{a\tilde{c}}{c\tilde{c}} = \frac{p+q}{2}, \qquad \frac{1}{4}\Re\cdot\tilde{c} = \frac{p-q}{2},$$

und also schließlich

$$(83) \qquad \boxed{\frac{(a+\sqrt{\Delta_l})\tilde{c}}{c\tilde{c}} = p, \qquad \frac{(a-\sqrt{\Delta_l})\tilde{c}}{c\tilde{c}} = q}.$$

Hiermit ist jede gegebene *reelle* Involution, für die $c \neq 0$ ist, mit Hilfe zweier Quaternionen p, q dargestellt, die offenbar Ruhe- oder Inzidenzpunkte von ihr bedeuten.

Das Punktepaar p, q kann nun real oder ideal sein. Real ist es, wenn $\Delta_l > 0$ ist (*Fall* A). In diesem Falle haben wir schon fast alle Möglichkeiten erschöpft. Nur kann einer der isolierten Inzidenzpunkte, etwa q, ins Unendliche rücken $(c = 0)$. Wir erhalten dann an Stelle von (80) die einfachere Gleichung

$$(80^*) \qquad \boxed{(z-p)+(z'-p)=0},$$

die eine besondere Art von Bewegung im Raume R_4, nämlich die Spiegelung am Punkte p darstellt. Solcher Transformationen gibt es ∞^4.

Ist $\Delta_l < 0$ (*Fall* B) und zugleich $c \neq 0$, so bieten sich ohne weiteres die Substitutionen

$$p = s + it, \quad q = s - it, \quad \sqrt{\Delta_l} = i\sqrt{-\Delta_l}$$

dar. An Stelle von (80) und (81) treten dann die Gleichungen

$$(84) \qquad \boxed{(z' - s)\,\tilde{t}\,(z - s) + t\tilde{t}t = 0},$$

$$(85) \qquad \frac{a\tilde{c}}{c\tilde{c}} = s, \quad \frac{\sqrt{-\Delta_l}\cdot\tilde{c}}{c\tilde{c}} = t.$$

Vgl. weiterhin die Formel Nr. 87.)

Ist aber $c = 0$ und also

$$(84^*) \qquad \boxed{(az + b)d^{-1} = a^{-1}(zd - b) = z'},$$

so werden die Formeln (84), (85) illusorisch. Solcher Transformationen gibt es ∞^6, abweichend von dem Falle (80*). An Stelle der durch Quaternionen darstellbaren Inzidenzpunkte p, q sind zwei konjugiert-imaginäre Punkte *des akzessorischen Gebietes* getreten, deren reelles Paar von sechs Konstanten abhängt. Zu deuten sind die Formeln (84*) als Spiegelungen an reellen Ebenen des R_4.

Die ∞^1 reellen Punkte eines jeden realen Kreises durch die zwei *isolierten* Inzidenzpunkte sind durch eine gewöhnliche Involution gepaart, die im Falle A hyperbolisch, im Falle B elliptisch ist. Außer diesen ∞^3 Kreisen gibt es noch ∞^5 reale Kreise, deren Punkte involutorisch gepaart sind. Diese stehen in je zwei Punkten senkrecht auf dem kontinuierlichen Inzidenzgebiet, der *Inzidenzkugel*, die im Falle A ideal und im Falle B real ist. Im Falle A ist also die Involution, die zu einem solchen Kreis zweiter Art gehört, elliptisch, und im Falle B ist sie hyperbolisch. Die Kreise zweiter Art sind zu ∞^4 auf ∞^1 Sphären verteilt, die die Inzidenzkugel enthalten, und orthogonale Trajektorien sind zu den Kreisen erster Art. Ist $c \neq 0$, so genügt die Inzidenzkugel den Gleichungen

$$(86) \qquad N(z - p) = 0, \quad N(z - q) = 0,$$

im Falle B also den Gleichungen

$$(87) \qquad \boxed{(z - s)(\tilde{z} - \tilde{s}) - t\tilde{t} = 0, \quad (z - s)\,\tilde{t} + t(\tilde{z} - \tilde{s}) = 0},$$

Beachtung verdienen die Grenzfälle (80*) und (84*). Im ersten Falle A sind die Kreise erster Art die Geraden durch p, die zweiter Art

haben p zum Mittelpunkt. Die Inzidenzkugel ist akzessorisch. Im Grenzfalle B sind die Kreise erster Art nicht spezialisiert. Sie haben ihre Mittelpunkte auf der Inzidenzebene. Die Kreise zweiter Art sind zu ∞^4 auf die ∞^1 ebenen Räume durch dieses Inzidenzgebiet verteilt, und ∞^3 darunter sind gerade Linien.

Diese anscheinend völlig verschiedenen Begriffe, die Spiegelung an einem Punkt und die Spiegelung an einer Ebene sind also besondere Fälle des umfassenderen Begriffs der Involution. Im komplexen Gebiet kann man sogar *kontinuierlich*, nämlich ohne aus der Mannigfaltigkeit der $(\infty^{2\cdot 8})$ Involutionen herauszutreten, von der einen Art von Transformationen zur anderen übergehen.

Das Seitenstück zu unseren „Involutionen" sind die $\infty^{2\cdot 8}$ projektiven Spiegelungen an Paaren von Geraden in R_3.

Wir hatten darauf hingewiesen, daß es im komplexen Gebiete, außer den Fortsetzungen der hier behandelten Familien reeller involutorischer Transformationen im komplexen Gebiet des Raumes R_3 noch andere involutorische Transformationen in der Gruppe Γ_{15} oder G_{15} gibt. Sie bilden ein Kontinuum von 2·6 Dimensionen; jede ist Spiegelung von einem *imaginären* Paar Ebenen auf M_4^2 in R_5, von dessen Ebenen eine akzessorisch sein kann. Ein Beispiel ist die Transformation

$$iz_3 = z_0', \quad iz_2 = z_1', \quad -iz_1 = z_2', \quad -iz_0 = z_3'.$$

Eine Methode, alle diese Spiegelungen auf einfache Art zu bestimmen, wird sich uns später ergeben (§ 11).

§ 6.

Fortsetzung. Einige Anwendungen.

Die in § 5 unterschiedenen Klassen I und III von reellen uneigentlichen involutorischen Möbiusschen Transformationen lassen sich eine Strecke weit zusammen behandeln.

Jede uneigentliche Transformation unserer Gruppe läßt sich, wenn wir die in Nr. 52 eingeführten Bezeichnungen beibehalten, durch bilineare Gleichungen

$$\begin{aligned} z' n \tilde{z} + z' r - l\tilde{z} - m &= 0, \\ \tilde{z} \nu z' + \varrho z' - \tilde{z}\lambda - \mu &= 0 \end{aligned} \tag{88}$$

ausdrücken, wo

$$\nabla_l = \begin{Bmatrix} l & m \\ n & r \end{Bmatrix}, \quad \nabla_r = \begin{Bmatrix} \lambda & \nu \\ \mu & \varrho \end{Bmatrix}, \quad \nabla_l \cdot \nabla_r = 1,$$

usw. Die erste dieser Gleichungen ist gleichbedeutend mit der anderen

$$z\tilde{n}\tilde{z}' + \tilde{r}\tilde{z}' - z\tilde{l} - \tilde{m} = 0,$$

und mit dieser ist invariant-verbunden die Gleichung, die man aus ihr durch Vertauschung von z und z' erhält,

$$z'\tilde{n}\tilde{z} - z'\tilde{l} + \tilde{r}\tilde{z} - \tilde{m} = 0.$$

Diese Gleichung aber hat dieselbe Form wie die erste unter (88). Setzen wir also

$$(89)\qquad \begin{aligned} F &= z'n\tilde{z} + z'r - l\tilde{z} - m, \\ G &= z'\tilde{n}\tilde{z} - z'\tilde{l} + \tilde{r}\tilde{z} - \tilde{m}, \end{aligned}$$

so ist das ganze Büschel von Abhängigkeiten zwischen z und z', das man mit Hilfe zweier numerischer Parameter σ, τ aus F und G in der Form

$$\sigma F + \tau G = 0$$

zusammensetzen kann, mit $F = 0$ invariant verbunden gegenüber eigentlichen Möbiusschen Transformationen. Man kann das leicht durch Rechnung bestätigen. Insbesondere werden dann, wenn (wie hier vorausgesetzt wurde) $F = 0$ eine Transformation darstellt, alle durch die angeführte Gleichung darstellbaren Transformationen mit ihr invariant-verbunden sein.

Zerlegen wir jetzt den quasi-bilinearen Ausdruck F nach dem Schema[32])

$$(90)\qquad \boxed{F = \tfrac{1}{2}(F+G) + \tfrac{1}{2}(F-G),}$$

so erhalten wir ohne weiteres die Bedingung dafür, daß eine vorgelegte Transformation der Form (88) involutorisch ist: Sie kann es nur dann sein, wenn entweder $F - G$ oder $F + G$ identisch gleich Null ist. *Abweichend von dem Fall der eigentlichen Transformationen läßt sich aber die Bedingung dafür, daß eine uneigentliche Möbiussche Transformation involutorisch ist, durch lineare Gleichungen ausdrücken.*

Entsprechend läßt sich in der projektiven Geometrie die Bedingung dafür, daß eine Korrelation involutorisch ist, durch lineare Gleichungen ausdrücken.

Inversionen.

Ist $F - G = 0$, so heißt das, daß m und n numerische, l und $-r$ konjugierte Quaternionen sind. Die Gleichung $F = 0$ hat also dann die Form

$$(91, l)\qquad \boxed{n \cdot z'\tilde{z} - (z'\tilde{l} + l\tilde{z}) - m = 0,}$$

wofür $n = \tilde{n}$ und $m = \tilde{m}$ ist. Die Zahl der homogenen Konstanten der Transformation (88) ist damit auf sechs reduziert. Die nach Nr. 35 zu berechnenden mit dem Quadrupel $l, m, n, -\tilde{l}$ verschwisterten Quaternionen werden jetzt zu jenen Quaternionen selbst proportional. Setzen wir nämlich

$$(92)\qquad -(l\tilde{l} + mn) = \Delta_l,$$

[32]) Siehe die Anmerkung am Schluß des nächsten Paragraphen.

so wird

$$\boxed{\nabla_l = \Delta_l^2,} \tag{93}$$

und, nach (35), wenn sogleich ϱ durch $-\tilde{\lambda}$ ersetzt wird,

$$l = \Delta_l \cdot \lambda, \quad n = \Delta_l \cdot \nu,$$
$$m = \Delta_l \cdot \mu, \quad \tilde{l} = \Delta_l \cdot \tilde{\lambda}.$$

Die Gleichung $(91, l)$ kann auch so geschrieben werden:

$$\boxed{n \cdot \tilde{z}z' - (\tilde{z}l + \tilde{l}z') - m = 0.} \tag{91, r}$$

Ist nun $\Delta_l < 0$, so hat man den Fall A vor sich (S. 203, 204). Es gibt eine reale *Inzidenzsphäre*, die für sich allein schon die Transformation bestimmt. Die Transformation ist entweder eine Transformation durch reziproke Radien,

$$(z' - p)(\tilde{z} - \tilde{p}) - r^2 = 0, \tag{94}$$

wo

$$p = \frac{l}{n}, \quad r^2 = -\frac{\Delta_l}{n^2}$$

ist, oder sie ist (wenn $n = 0$), *die Spiegelung an einem Flach*, d. h. an einer Sphäre, die den uneigentlichen Punkt enthält. Ist $\Delta_l > 0$, so liegt der Fall B vor, die Inzidenzsphäre ist ideal.

Spiegelungen an Kreisen.

Es kann nun zweitens $F + G$ identisch gleich Null sein. Dann also sind m und n (und entsprechend auch μ und ν) vektoriell, es bestehen die Gleichungen

$$m + \tilde{m} = 0, \quad n + \tilde{n} = 0, \quad \mu + \tilde{\mu} = 0, \quad \nu + \tilde{\nu} = 0, \tag{95}$$

und die Gleichungen (88) erhalten die Form

$$\boxed{\begin{aligned} z'n\tilde{z} + z'\tilde{l} - l\tilde{z} - m &= 0, \\ \tilde{z}\nu z' + \tilde{\lambda}z' - \tilde{z}\lambda - \tilde{\mu} &= 0. \end{aligned}} \tag{96}$$

Es bleiben übrig zehn homogen auftretende Konstanten.

Es läßt sich einsehen, daß alle in der Form (96) darstellbaren Transformationen mit der Transformation

$$\boxed{\tilde{z} = z'} \tag{97}$$

(gegenüber der Gruppe Γ_{15}) äquivalent sind, also äquivalent sind mit der *Spiegelung an einer Geraden*,

$$z_0' = z_0, \quad z_1' = -z_1, \quad z_2' = -z_2, \quad z_3' = -z_3,$$

wenn auch die vollständige Durchführung einer hierauf abziehenden Rechnung unbequem ist und kaum lohnt.

Zunächst nämlich kann man auf z und z' eine Transformation von G_{15} anwenden, die bewirkt, daß bei der transformierten Transformation $l = 0$, $\lambda = 0$ wird. Sind $z = p$ und $z' = q$ einander entsprechende verschiedene Punkte, so leistet das z. B. die Transformation

$$\frac{z-p}{z-q} = z^*.$$

In der resultierenden Transformation, die die Form

$$z'n\tilde{z} - m = 0, \qquad \tilde{z}\nu z' - \mu = 0 \tag{96a}$$

hat (mit anderen Konstanten $n \ldots \mu$) sind also 0 und ∞ entsprechende Punkte. Die erhaltene Transformation läßt sich zusammensetzen aus der Transformation (durch reziproke Radien)

$$\sqrt{\frac{N(m)}{N(n)}} \cdot \frac{1}{\tilde{z}} = z^*$$

und der involutorischen Bewegung

$$\sqrt{\frac{N(n)}{N(m)}} \cdot mz^*n^{-1} = z',$$

die die Spiegelung an einer Ebene durch den Punkt $z = 0$ ist. Es gibt also einen realen Kreis, dessen sämtliche Punkte bei der Transformation (96a) in Ruhe bleiben. Verschafft man sich einen Punkt dieses Kreises (was im allgemeinen die Auflösung einer quadratischen Gleichung erfordert), so kann man, durch eine neue Transformation, aus diesem Kreis eine Gerade machen, die dann schließlich, wieder durch eine Bewegung, in die Gerade $z = \tilde{z}$ übergeführt werden kann. Gleichzeitig muß die Transformation (96a) in die Spiegelung an dieser Geraden übergehen.

Übrigens war ja auch schon gesagt worden, daß jeder reale Kreis im Möbiusschen Kontinuum gegenüber Γ_{15} mit jedem anderen reell-äquivalent ist, und daß von den zugehörigen Spiegelungen dasselbe gilt (S. 202).

Die Transformation (96) *kann also aufgefaßt werden als Spiegelung an einem realen Kreis, dessen Gleichungen man durch die Substitution* $z' = z$ *erhält.*

Geht dieser Kreis nicht durch den Punkt ∞ (d. h. ist $n \neq 0$), so bestimmt er, als Ort von Punkten x, einen zweiten, aber idealen Kreis, Ort von Punkten y, der nicht akzessorisch ist, vermöge der dann für alle x und alle y bestehenden Gleichung

$$N(y - x) = 0.$$

Die betrachtete Transformation kann ebensowohl auch als Spiegelung an diesem zweiten Kreis bezeichnet werden, besser aber als *Spiegelung an dem Paar dieser zwei reellen Kreise* (*ihrer „Inzidenzkreise*) (vgl. S. 203, 205). Im Falle $n = 0$ ist der zweite Kreis akzessorisch.

Je zwei gepaarte und voneinander verschiedene Punkte z, z' können durch ∞^1 reale Kreise verbunden werden, deren jeder den ersten der zwei Inzidenzkreise in zwei Punkten senkrecht trifft, und deren ∞^1 reelle Punkte durch eine hyperbolische Involution gepaart sind. Entsprechendes gilt für den zweiten Inzidenzkreis, dann aber sind die involutorischen Paarungen elliptisch. Durch das Punktepaar z, z' werden so zwei Kugeln bestimmt, die sich in z und z' rechtwinklig schneiden, und deren jede einen der zwei Inzidenzkreise enthält.

Die isometrischen Sphären.

Man beweist mühelos den folgenden für eine beliebige Dimensionenzahl gültigen Lehrsatz:

Wenn eine reelle Möbiussche Tranformation im R_n sich nicht auf eine Ähnlichkeitstransformation reduziert, so gehören zu ihr zwei konzentrische und zueinander orthogonale sphärische M_{n-1} (solche also, von denen die eine real und die andere ideal ist), und diesen kommt die Eigenschaft zu, durch die Transformation isometrisch auf die beiden zugeordneten M'_{n-1} abgebildet zu werden.

Jede reelle eigentliche Möbiussche Transformation, die nicht eine bloße Ähnlichkeitstransformation ist, kann daher auf eine einzige Weise erzeugt werden durch die Spiegelung an der ersten von zwei unebenen einander zugeordneten realen $\mathsf{M}_{n-1}, \mathsf{M}'_{n-1}$ und eine darauf folgende Umlegung, und ebenso durch diese Umlegung und eine nachfolgende Spiegelung an der zweiten sphärischen Mannigfaltigkeit M'_{n-1}.

Ist die gegebene Transformation uneigentlich, so tritt an Stelle der Umlegung eine Bewegung.

Wir wollen die beschriebene Zerlegung im Falle $n = 4$ durch Quaternionenformeln ausdrücken.

Zunächst liefern die Gleichungen (41), (39), (51) die einander isometrisch zugeordneten realen Sphären:

$$(98)\qquad \begin{aligned} N(cz+d) &= \sqrt{\nabla_l}, \quad N(z\gamma+\delta) = \sqrt{\nabla_r}, \\ N(-z'c+a) &= \sqrt{\nabla_l}, \quad N(-\gamma z'+\alpha) = \sqrt{\nabla_r}, \end{aligned}$$

wobei $\sqrt{\nabla_l} \cdot \sqrt{\nabla_r} = 1$ anzunehmen ist und die positiven Wurzelwerte zu

wählen sind. (Die negativen liefern die zugehörigen idealen Sphären). Mithin läßt sich die Transformation $(z \to z')$

$$\frac{az+b}{cz+a} = \frac{z\alpha+\beta}{z\gamma+\delta} = z' \qquad \{c, \gamma \neq 0\}$$

darstellen (99) als Folge der Inversion $(z \leftrightarrow x)$

$$c^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\nabla_l}}{\tilde{z}\tilde{c}+\tilde{d}} - d\right\} = \left\{\frac{\sqrt{\nabla_r}}{\tilde{\gamma}\tilde{z}+\tilde{\delta}} - \delta\right\}\gamma^{-1} = x$$

und der Umlegung $(x \to z')$

$$\left.\begin{aligned} -\left\{\sqrt{\nabla_l}\cdot(\tilde{\gamma}\tilde{x}+\tilde{\delta}) - a\right\}c^{-1} &= \\ -\gamma^{-1}\left\{\sqrt{\nabla_r}(\tilde{x}\tilde{c}+\tilde{d}) - \alpha\right\} &= \end{aligned}\right\} = z',$$

und ebenso (100) als Folge derselben Umlegung $(z \to y)$

$$\left.\begin{aligned} -\left\{\sqrt{\nabla_l}\cdot(\tilde{\gamma}\tilde{z}+\tilde{\delta}) - a\right\}c^{-1} &= \\ -\gamma^{-1}\left\{\sqrt{\nabla_r}(\tilde{z}\tilde{c}+\tilde{d}) - \alpha\right\} &= \end{aligned}\right\} = y$$

und der Inversion $(y \leftrightarrow z')$

$$\left\{\frac{\sqrt{\nabla_l}}{\tilde{c}\tilde{y}-\tilde{a}} + a\right\}c^{-1} = \gamma^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\nabla_r}}{\tilde{y}\tilde{\gamma}-\tilde{\alpha}} + \alpha\right\} = z'.$$

Die sphärische und die pseudosphärische Geometrie.

In das Möbiussche Kontinuum lassen sich, außer der Euklidischen Geometrie des Raumes R_4, auch die vierdimensionale sphärische und pseudosphärische Geometrie einbauen.

Wir können uns eine reelle *Sphäre* durch einen Punkt (P) des Raumes R_5 bestimmt denken, der nicht auf der M_4^2 liegt. Nach Nr. 56, 91 kann dann als Zuordnung zwischen den Koordinaten von (P) und den Quaternionenkoordinaten der Sphäre (Nr. 91) diese angenommen werden:

$$\frac{P_\alpha + P_\omega}{2} = n, \quad \frac{P}{2} = l, \quad \frac{P_\alpha - P_\omega}{2} = -m.$$

Führen wir dann die Abkürzungen

$$\begin{aligned} (x\,|\,\tilde{y}) &= n\cdot x\tilde{y} - x\tilde{l} - l\tilde{y} - m, \\ [\tilde{x}\,|\,y] &= n\cdot\tilde{x}y - \tilde{x}l - \tilde{l}y - m \end{aligned} \tag{101}$$

ein, so folgt

$$\{P\,|\,P\} = -4\cdot(l\tilde{l} + mn) = 4\,\Delta \qquad \text{(Nr. 60, 92)}$$

$$\frac{\{P\,|\,X\}}{X_\alpha + X_\omega} = (x\,|\,\tilde{x}) = [\tilde{x}\,|\,x], \quad \frac{\{P\,|\,Y\}}{Y_\alpha + Y_\omega} = (y\,|\,\tilde{y}) = [\tilde{y}\,|\,y]$$

$$\frac{\{X\,|\,Y\}}{(X_\alpha + X_\omega)(Y_\alpha + Y_\omega)} = \frac{1}{2}(y-x)(\tilde{y}-\tilde{x}) \qquad \text{(Nr. 66).}$$

Ist dann $\Delta > 0$, liegt also der Punkt (P) innerhalb von M_4^2, so wird durch die zugehörige ideale Sphäre eine Maßbestimmung auf M_4^2, und damit auch eine Maßbestimmung im reellen Möbiusschen Kontinuum $\{z\}$ erklärt, in der zwei reelle Punkte (X) und (Y) oder x und y einen mod 2π bestimmten *sphärischen Abstand* $\Theta_X^Y = \Theta_X^y$ enthalten. Als Ausgangspunkt nehme man etwa an, daß (P) der Punkt $1:0:0:0:0:0$ ist, die zugehörige Sphäre also durch den linearen Raum $Z_\alpha = 0$ aus M_4^2 ausgeschnitten wird. Es wird dann, wie üblich, zunächst $\cos\Theta_X^Y$ erklärt durch die Formel

$$\cos\Theta_X^Y = \frac{X_0}{X_\alpha}\cdot\frac{Y_0}{Y_\alpha} + \cdots + \frac{X_3}{X_\alpha}\cdot\frac{Y_3}{Y_\alpha} + \frac{X_\omega}{X_\alpha}\cdot\frac{Y_\omega}{Y_\alpha} = \frac{\frac{1}{2}(X\tilde{Y}+Y\tilde{X}) + X_\omega Y_\omega}{X_\alpha Y_\alpha}$$
$$= \frac{X_\alpha Y_\alpha - \{X\,|\,Y\}}{X_\alpha Y_\alpha},$$

und dieser Ausdruck wird leicht in eine invariante — also für alle bezeichneten Lagen von (P) gültige — Form gesetzt:

$$\cos\Theta_X^Y = \frac{\{P\,|\,X\}\{P\,|\,Y\} - \{P\,|\,P\}\{X\,|\,Y\}}{\{P\,|\,X\}\{P\,|\,Y\}}.$$

Es folgt dann noch

$$\sin\frac{1}{2}\Theta_X^Y = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\{P\,|\,P\}\{X\,|\,Y\}}{\{P\,|\,X\}\{P\,|\,Y\}}},$$

$$\cos\frac{1}{2}\Theta_X^Y = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{2\{P\,|\,X\}\{P\,|\,Y\} - \{P\,|\,P\}\{X\,|\,Y\}}{\{P\,|\,X\}\{P\,|\,Y\}}},$$

womit nunmehr, nach Entscheidung über die zwei Wurzelwerte, Θ_X^Y bis auf ganzzahlige Vielfache von 4π bestimmt ist.

Hier kann man nun die soeben entwickelten Ausdrücke einsetzen. Es ist aber

$$\begin{aligned}&(x\,|\,\tilde{y})(y\,|\,\tilde{x}) - (x\,|\,\tilde{x})\cdot(y\,|\,\tilde{y})\\ &= [\tilde{x}\,|\,y][\tilde{y}\,|\,x] - [\tilde{x}\,|\,x]\cdot[\tilde{y}\,|\,y]\\ &= -\Delta\cdot(y-x)(\tilde{y}-\tilde{x}).\end{aligned} \tag{102}$$

[33])

So ergibt sich schließlich

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}\Theta_x^y &= \sqrt{\frac{\Delta\cdot(y-x)(\tilde{y}-\tilde{x})}{(x\,|\,\tilde{x})\cdot(y\,|\,\tilde{y})}} = \sqrt{\frac{\Delta\cdot[\tilde{y}-\tilde{x}]\,[y-x]}{[\tilde{x}\;x]\cdot[\tilde{y}\;y]}},\\ \cos\frac{1}{2}\Theta_x^y &= \sqrt{\frac{(x\,|\,\tilde{y})(y\,|\,\tilde{x})}{(x\;\tilde{x})\cdot(y\;\tilde{y})}} = \sqrt{\frac{[\tilde{x}\,|\,y]\;[\tilde{y}\,|\,x]}{[\tilde{x}\;x]\cdot[\tilde{y}\,|\,y]}}.\end{aligned}} \tag{103}$$

[33]) Man kommt zu diesen Umformungen am leichtesten von einem der nachher zu betrachtenden Spezialfälle aus. Da diese Beziehungen invariant sein müssen, so genügt das sogar schon zum Beweis der allgemeinen Formel (102), die man jedoch, nachdem sie einmal vermutet ist, besser noch durch eine einfache Verifikation erhärtet.

Ist $\Delta < 0$, so hat man es mit einer realen Sphäre zu tun. Man setze dann, um die durch (103) nun schon im reellen Gebiete eingeführten imaginären Winkelgrößen zu vermeiden,

$$\Theta_X^Y = i \cdot \mathsf{H}_X^Y, \quad \text{oder} \quad \Theta_x^y = i \cdot \mathsf{H}_y^x.$$

An Stelle der der sphärischen Geometrie angehörigen Formeln (95) treten dann solche der pseudosphärischen Geometrie:

$$(104) \qquad \boxed{\begin{aligned} \sinh \frac{1}{2} \mathsf{H}_x^y &= \sqrt{-\frac{\Delta \cdot (y-x)(\tilde{y}-\tilde{x})}{(x\,|\,\tilde{x}) \cdot (y\,|\,\tilde{y})}} = \sqrt{\frac{-\Delta \cdot [\tilde{y}-\tilde{x}]\,[y-x]}{[\tilde{x}\,|\,x] \cdot [\tilde{y}\,|\,y]}}, \\ \cosh \frac{1}{2} \mathsf{H}_x^y &= \sqrt{\frac{(x\,|\,\tilde{y})\,(y\,|\,\tilde{x})}{(x\,|\,\tilde{x}) \cdot (y\,|\,\tilde{y})}} = \sqrt{\frac{[\tilde{x}\,|\,y]\,[\tilde{y}\,|\,x]}{[\tilde{x}\,|\,x] \cdot [\tilde{y}\,|\,y]}}. \end{aligned}}$$

Der Radikand der zweiten hier vorkommenden Wurzelgröße ist nach (102) $\geqq 1$, wenn x und y reell sind, und der der ersten ist $\geqq 0$, wenn x und y überdies auch den Ausdrücken $(x\,|\,\tilde{x}) = [\tilde{x}\,|\,x]$ und $(y\,|\,\tilde{y}) = [\tilde{y}\,|\,y]$ gleiches Vorzeichen erteilen. Wählt man dann für die zweite Wurzelgröße den positiven Wert, so wird einer der Werte von H_x^y reell und bis auf das Vorzeichen bestimmt[34]). Bemerkenswert sind einige besondere Fälle der Formeln (103) und (104). Ist

$$z'\tilde{z} + 1 = \tilde{z}z' + 1 = 0$$

die betrachtete Inversion, Spiegelung an einer idealen Sphäre, so wird

$$(103^*) \qquad \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \Theta_x^y &= \sqrt{\frac{(y-x)(\tilde{y}-\tilde{x})}{(x\tilde{x}+1)(y\tilde{y}+1)}}, \\ \cos \frac{1}{2} \Theta_x^y &= \sqrt{\frac{(x\tilde{y}+1)(y\tilde{x}+1)}{(x\tilde{x}+1)(y\tilde{y}+1)}}; \end{aligned}$$

handelt es sich um eine reale Sphäre, gehörig zur Inversion

$$z'\tilde{z} - 1 = \tilde{z}z' - 1 = 0,$$

so erhält man entsprechend

$$(104^*) \qquad \begin{aligned} \sinh \frac{1}{2} \mathsf{H}_x^y &= \sqrt{\frac{(y-x)(\tilde{y}-\tilde{x})}{(x\tilde{x}-1)(y\tilde{y}-1)}}, \\ \cosh \frac{1}{2} \mathsf{H}_x^y &= \sqrt{\frac{(x\tilde{y}-1)(y\tilde{x}-1)}{(x\tilde{x}-1)(y\tilde{y}-1)}}; \end{aligned}$$

ähnlich liefert die Spiegelung

$$\tilde{z} + z' = 0$$

[34]) Ähnliche Formeln hat man auch im Falle einer (vom Verfasser so genannten) Hermiteschen Maßbestimmung. Siehe Math. Annalen **60** (1905), S. 321. Beide Formelgruppen fallen zusammen, wenn man dort die Stufenzahl n gleich zwei setzt, und hier nur reelle Quaternionen der Form $(z_0, z_1, 0, 0)$, also gemeine komplexe Veränderliche $z_0 + z_1 i$ benutzt.

an dem Flach $z_0 = 0$ die Formeln

$$(104^{**}) \qquad \sinh \frac{1}{2} \mathsf{H}_x^y = \sqrt{\frac{(y-x)(\tilde{y}-\tilde{x})}{(x+\tilde{x})(y+\tilde{y})}},$$

$$\cosh \frac{1}{2} \mathsf{H}_x^y = \sqrt{\frac{(x+\tilde{y})(y+\tilde{x})}{(x+\tilde{x})(y+\tilde{y})}},$$

usw.

Schließlich erwähne ich noch, als ebenfalls in diesen Zusammenhang gehörig und vom vielfältigem Gebrauch, die Formel für den Kosinus des Winkels zwei Sphären $(P) = (Z^{(1)})$ und $(Q) = (Z^{(2)})$:

$$(105) \qquad \boxed{\cos \Phi_P^Q = \frac{-\{P \mid Q\}}{\sqrt{-\{P \mid P\}}\sqrt{-\{Q \mid Q\}}} = \frac{\frac{1}{2}(l_1\tilde{l}_2 + l_2\tilde{l}_1 + m_1 n_2 + m_2 n_1)}{\sqrt{l_1\tilde{l}_1 + m_1 n_1} \cdot \sqrt{l_2\tilde{l}_2 + m_2 n_2}}}.$$

§ 7.

Bilineare Formen, deren Argumente Quaternionen sind.

Bekanntlich kann das Rechnen mit linearen Transformationen von gewöhnlichen komplexen Veränderlichen betrachtet werden als ein Ausschnitt aus einer umfassenden Theorie, in der man es mit homogenen Koordinaten und bilinearen Formen zu tun hat. *Addition* und (symbolische) *Multiplikation* bilinearer Formen bilden in dieser Theorie einen geschlossenen Kreis von Operationen, der als ein Rechnen mit gewissen höheren komplexen Zahlen aufgefaßt werden kann: Die Multiplikation bilinearer Formen, in üblicher Weise erklärt, ist mit der zugehörigen Addition durch die Distributionsgesetze verknüpft, und sie selbst genügt dem Assoziationsgesetz. Handelt es sich um Anwendungen dieser Rechnungsmethode — die auch als ein Rechnen mit Matrizen dargestellt werden kann — in der *projektiven* Geometrie, nehmen wir an, des „gewöhnlichen" Raumes, so sind, entsprechend der dann nötigen Unterscheidung von kontragredienten Veränderlichen (Punkt- und Ebenenkoordinaten) und Transformationen *vier* Arten (geordneter) bilinearer Formen zu unterscheiden, und es sind dann auch nicht alle der Form nach herstellbaren „Produkte" solcher Formen zu brauchen, sondern nur solche Produktbildungen, die sich als *invariant* erweisen gegenüber Paaren von beliebigen (zueinander kogredienten oder, nach Umständen, kontragredienten) linearen Transformationen. Mit jeder der vier Arten bilinearer Formen (die Punkt- oder Ebenenkoordinaten oder beiderlei Koordinaten in verschiedener Ordnung enthalten) sind dann noch zwei Arten bilinearer Formen in *Linienkoordinaten* verbunden, so daß acht die Zahl der in Linienkoordinaten

zu unterscheidenden bilinearen Formen wird. Da aber zwischen den zweierlei Linienkoordinaten der bekannte einfache Zusammenhang

$$\mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{U}_{23}, \quad \mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{U}_{31}, \quad \mathfrak{X}_{03} = \mathfrak{U}_{12},$$
$$\mathfrak{X}_{23} = \mathfrak{U}_{01}, \quad \mathfrak{X}_{31} = \mathfrak{U}_{02}, \quad \mathfrak{X}_{12} = \mathfrak{U}_{03}$$

besteht, so hat man es auch bei bilinearen Formen von Linienkoordinaten im Grunde mit vier Arten solcher Formen zu tun: Jedesmal eine von zwei solchen zusammengehörigen Formen kann als entbehrlich betrachtet werden.

Ein Seitenstück zu dieser Rechnungsmethode gibt es nun — wie zu erwarten — in der Theorie unserer Möbiusschen Gruppe G_{15}, H_{15} oder Γ_{15}, H_{15}; und das soll nunmehr, behufs Vorbereitung gewisser Anwendungen, dargelegt werden.

Um das zu erklärende Rechnen mit bilinearen (und „quasi-bilinearen") Formen von Quaternionen zu dem Rechnen mit linearen oder quasi-linearen Transformationen einer einzelnen Quaternion z von vornherein in eine möglichst einfache Beziehung zu setzen, gehen wir von diesen letzten Transformationen aus. Sie sind in übersichtlicher Zusammenstellung:

(106)
$$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{az+b}{cz+d} = z', & \dfrac{z\alpha+\beta}{z\gamma+\delta} = z', \\ \dfrac{l\tilde{z}+m}{n\tilde{z}+r} = z', & \dfrac{\tilde{z}\lambda+\mu}{\tilde{z}\nu+\varrho} = z'. \end{array}\right|$$

Wir gelangen jetzt zu bilinearen oder „quasi-bilinearen" *homogenen* Gleichungen, wenn wir in jedem der vier Fälle eine durch diesen Fall selbst bestimmte unter den zwei Substitutionen

(107a) $$z = x_1 x_2^{-1}, \qquad z = u_2^{-1} u_1,$$

und ebenso *eine bestimmte* unter den zwei entsprechenden Substitutionen

(107b) $$z' = y_1 y_2^{-1}, \qquad z' = v_2^{-1} v_1$$

ausführen: Immer nur eine unter $2 \cdot 2$ Substitutionen derart, die wir machen können, liefert eine Gleichung der verlangten Art, eine bilineare Gleichung nämlich, deren Koeffizienten *zwischen den Veränderlichen* stehen. So erhalten wir der Reihe nach die vier Gleichungen

(108)
$$\begin{aligned} v_2 a x_1 + v_2 b x_2 - v_1 c x_1 - v_1 d x_2 &= 0, \\ u_1 \alpha y_2 + u_2 \beta y_2 - u_1 \gamma y_1 - u_2 \delta y_1 &= 0, \\ v_2 l \tilde{u}_1 + v_2 m \tilde{u}_2 - v_1 n \tilde{u}_1 - v_1 r \tilde{u}_2 &= 0, \\ \tilde{x}_1 \lambda y_2 + \tilde{x}_2 \mu y_2 - \tilde{x}_1 \nu y_1 - \tilde{x}_2 \varrho y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Umgekehrt entstehen aus diesen durch die entgegengesetzten Substitutionen wieder die Gleichungen (106). Jede der Gleichungen (108) kann nun als Ausdruck *zweier* Abhängigkeiten angesehen werden, je nachdem man das eine oder andere der darin vorkommenden Quaternionenpaare als gegeben ansieht. So enthält eine jede dieser Gleichungen nicht nur den Ausdruck einer Zuordnung $z \rightarrow z'$, sondern auch den der umgekehrten Zuordnung $z \leftarrow z'$. Aber jede der Gleichungen (108) kann auch in zweierlei Formen geschrieben werden: Ersetzt man ihre linke Seite, die ja eine Quaternion ist, durch die konjugierte Quaternion, so erhält man nichts wirklich Neues. Dementsprechend können wir nun in jedem Falle *eine Wahl* unter zwei Möglichkeiten treffen: *Wir wollen festsetzen, daß in einer Gleichung* $\mathfrak{A} = 0$ *oder* $\bar{\mathfrak{A}} = 0$ *von der Form* (108) *oder von der konjugierten Form immer die unabhängigen Veränderlichen (entsprechend der Quaternion* z*) an erster Stelle erscheinen sollen.* Demnach soll also der ersten Gleichung unter (106) formal nicht etwa die erste Gleichung unter (108), sondern die etwas anders gebildete, aber in der Sache mit ihr übereinstimmende Gleichung

$$\tilde{x}_1 \tilde{a} \tilde{v}_2 + \tilde{x}_2 \tilde{b} \tilde{v}_1 - \tilde{x}_1 \tilde{c} \tilde{v}_1 - \tilde{x}_2 \tilde{d} \tilde{v}_1 = 0$$

zugeordnet werden. Aber nicht nur auf solche *Gleichungen* wird es uns weiterhin ankommen, sondern ebensosehr und mehr noch auf die bilinearen oder „quasi-bilinearen" Ausdrücke oder *Formen*, die ihre linken Seiten sind. Wir führen für sie besondere Zeichen ein:

(109)
$$\begin{aligned} T &= \tilde{x}_1 \tilde{a} \tilde{v}_2 + \tilde{x}_2 \tilde{b} \tilde{v}_2 - \tilde{x}_1 \tilde{c} \tilde{v}_1 - \tilde{x}_2 \tilde{d} \tilde{v}_1, \\ \mathsf{T} &= u_1 \alpha y_2 + u_2 \beta y_2 - u_1 \gamma y_1 - u_2 \delta y_1, \\ \Sigma &= u_1 \tilde{l} \tilde{v}_2 + u_2 \tilde{m} \tilde{v}_2 - u_1 \tilde{n} \tilde{v}_1 - u_2 \tilde{r} \tilde{v}_1, \\ S &= \tilde{x}_1 \lambda y_2 + \tilde{x}_2 \mu y_2 - \tilde{x}_1 \nu y_1 - \tilde{x}_2 \varrho y_1. \end{aligned}$$

Wollen wir dann von diesen Formen zurückgehen zu den entsprechenden Gleichungen

(110)
$$T = 0, \quad \mathsf{T} = 0, \quad \Sigma = 0, \quad S = 0,$$

so betrachten wir *immer* das an erster Stelle (links) stehende Paar von homogenen Veränderlichen x_1, x_2 oder u_1, u_2 als das System der unabhängigen Veränderlichen, und das an zweiter Stelle (rechts) stehende Paar, das mit v_1, v_2 oder y_1, y_2 bezeichnet ist, als von jenem abhängig. So entspricht also nunmehr jeder der Gleichungen (110) und folglich auch jeder der Formen (109) eine völlig bestimmte der Gleichungen (106) — der Reihe nach —; während natürlich umgekehrt eine der Glei-

chungen (106) die entsprechende Form nur bis auf einen numerischen Faktor bestimmt.

Wir gehen jetzt dazu über, eine Operation zu erklären, die wir mit mehreren Formen der vier Typen $[T]$, $[\mathsf{T}]$, $[\Sigma]$, $[S]$ vornehmen wollen, und die als (symbolische) *Multiplikation* oder auch als *Zusammensetzung* oder *Komposition* solcher Formen bezeichnet werden soll. Wir gehen dabei von der Bemerkung aus, daß wir mit den Formen (109) nicht nur Zuordnungen $z \rightarrow z'$ einzelner Quaternionen zu anderen, sondern auch Zuordnungen von Quaternionenpaaren (also inhaltsreichere Zuordnungen) verbinden können. Setzen wir, abkürzend, der Reihe nach

$$(111)\qquad \begin{aligned} T &= \tilde{x}_1'\tilde{v}_2 - \tilde{x}_2'\tilde{v}_1, & \mathsf{T} &= u_1' y_2 - u_2' y_1, \\ \Sigma &= \tilde{x}_1'\tilde{v}_2 - \tilde{x}_2'\tilde{v}_1, & S &= u_1' y_2 - u_2' y_1, \end{aligned}$$

so sehen wir, daß mit jeder der viererlei Formen auch eine bestimmte Zuordnung *von Paaren* von veränderlichen Quaternionen verbunden ist. Diese vier Zuordnungen sind der Reihe nach:

$$(112)\qquad \boxed{\begin{aligned} (T)\colon\ & \begin{aligned} a x_1 + b x_2 &= x_1', \\ c x_1 + d x_2 &= x_2', \end{aligned} & (\mathsf{T})\colon\ & \begin{aligned} u_1\alpha + u_2\beta &= u_1', \\ u_1\gamma + u_2\delta &= u_2', \end{aligned} \\ (\Sigma)\colon\ & \begin{aligned} l\tilde{u}_1 + m\tilde{u}_2 &= x_1', \\ n\tilde{u}_1 + r\tilde{u}_2 &= x_2', \end{aligned} & (S)\colon\ & \begin{aligned} \tilde{x}_1\lambda + \tilde{x}_2\mu &= u_1', \\ \tilde{x}_1\nu + \tilde{x}_2\varrho &= u_2', \end{aligned} \end{aligned}}$$

Wir bemerken, daß man von ihnen wieder eindeutig zu den Formen T, T, Σ, S zurückgehen kann, und daß sie schließlich auch unmittelbar wieder Abhängigkeiten der Form (106) bestimmen: Die auszuführenden Substitutionen heißen

$$(113\text{a})\qquad z = x_1 x_2^{-1}, \qquad z = u_2^{-1} u_1,$$

$$(113\text{b})\qquad z' = x_1' x_2'^{-1}, \qquad z' = u_2'^{-1} u_1',$$

was wieder die Gleichungen (107) sind.

Wir können nun zwei Zuordnungen der Typen (112), einerlei ob sie Transformationen darstellen oder nicht — also unabhängig vom Verhalten der zugeordneten Nablafunktionen — zu einer dritten zusammensetzen nach dem Schema

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3,$$

wenn sie nur passend ausgewählt sind. Zum Beispiel liefern zwei Zuordnungen vom Typus $[T]$,

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 &= x_1', & a_2 x_1' + b_2 x_2' &= x_1'', \\ c_1 x_1 + d_1 x_2 &= x_2', & c_2 x_1' + d_2 x_2' &= x_2'', \end{aligned}$$

in der Reihenfolge T_1, T_2 hintereinander ausgeführt, eine dritte Zuordnung $T_1 T_2 = T_3$ derselben Art durch Substitution der Werte von x_1', x_2' aus den ersten zwei Gleichungen in die beiden letzten; sie liefern also nach Ersetzung von x_1'', x_2'' durch x_1', x_2' wieder ein Gleichungspaar derselben Form:

$$a_3 x_1 + b_3 x_2 = x_1',$$
$$c_3 x_1 + d_3 x_2 = x_2'.$$

Oder es liefern zwei Zuordnungen Σ_1 und S_2, in dieser Reihenfolge zusammengesetzt, eine Zuordnung $\Sigma_1 S_2 = \mathsf{T}_3$ vom Typus $[\mathsf{T}]$: Aus

$$l_1 \tilde{u} + m_1 \tilde{u}_2 = x_1', \qquad \tilde{x}_1' \lambda_2 + \tilde{x}_2' \mu_2 = u_1'',$$
$$n_1 \tilde{u} + r_1 \tilde{u}_2 = x_2', \qquad \tilde{x}_1' \nu_2 + \tilde{x}_2' \varrho_2 = u_2''$$

folgt nach Ersetzung von u_1'' und u_2'' durch u_1' und u_2' ein Gleichungspaar der Form

$$u_1 \alpha_3 + u_2 \beta_3 = u_1',$$
$$u_1 \gamma_3 + u_2 \gamma_3 = u_2',$$

usw.

Wir erklären nun das „Produkt" oder die „Multiplikation" zweier Formen der Typen (109) *derart, daß die auszuführenden Produktbildungen und die Zusammensetzung der den Faktoren entsprechenden Zuordnungen* (112) *parallel laufen, und daß diese Produktbildungen folglich auch die Zusammensetzung der entsprechenden Zuordnungen* (106) *liefern.*

Die folgende Tafel zeigt, welche der formal ausführbaren Produkte hiernach gebildet werden sollen und welchen Charakter in jedem Falle das Ergebnis hat. Die Indizes 1, 2 zeigen die Reihenfolge der Faktoren eines solchen Produktes an.

(114)

	T_2	S_2	Σ_2	T_2
T_1	T_3	S_3	.	.
S_1	.	.	T_3	S_3
Σ_1	Σ_3	T_3	.	.
T_1	.	.	Σ_3	T_3

(➸)

Sodann entnimmt man der nunmehr folgenden Tafel, wie das Koeffizientensystem des Produktes $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3$ aus den Koeffizientensystemen seiner Faktoren abgeleitet werden soll:

$$\begin{pmatrix}\tilde a\,\tilde c\\ \tilde b\,\tilde d\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\tilde a\,\tilde c\\ \tilde b\,\tilde d\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}\tilde a\,\tilde c\\ \tilde b\,\tilde d\end{pmatrix}_3,\qquad (T_1T_2=T_3)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\,\gamma\\ \beta\,\delta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\alpha\,\gamma\\ \beta\,\delta\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}\alpha\,\gamma\\ \beta\,\delta\end{pmatrix}_3,\qquad (\mathsf{T}_1\mathsf{T}_2=\mathsf{T}_3)$$

$$\begin{pmatrix}\tilde a\,\tilde c\\ \tilde b\,\tilde d\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\lambda\,\nu\\ \mu\,\varrho\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}\lambda\,\nu\\ \mu\,\varrho\end{pmatrix}_3,\qquad (T_1S_2=S_3)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\,\gamma\\ \beta\,\delta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\tilde l\,\tilde n\\ \tilde m\,\tilde r\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}\tilde l\,\tilde n\\ \tilde m\,\tilde r\end{pmatrix}_3,\qquad (\mathsf{T}_1\Sigma_2=\Sigma_3)$$

(115)

$$\begin{pmatrix}\lambda\,\nu\\ \mu\,\varrho\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\alpha\,\gamma\\ \beta\,\delta\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}\lambda\,\nu\\ \mu\,\varrho\end{pmatrix}_3,\qquad (S_1\mathsf{T}_2=S_3)$$

$$\begin{pmatrix}\tilde l\,\tilde n\\ \tilde m\,\tilde r\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\tilde a\,\tilde c\\ \tilde b\,\tilde d\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}\tilde l\,\tilde n\\ \tilde m\,\tilde r\end{pmatrix}_3,\qquad (\Sigma_1T_2=\Sigma_3)$$

$$\begin{pmatrix}\lambda\,\nu\\ \mu\,\varrho\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\tilde l\,\tilde n\\ \tilde m\,\tilde r\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}\tilde a\,\tilde c\\ \tilde b\,\tilde d\end{pmatrix}_3,\qquad (S_1\Sigma_2=T_3)$$

$$\begin{pmatrix}\tilde l\,\tilde n\\ \tilde m\,\tilde r\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\lambda\,\nu\\ \mu\,\varrho\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}\alpha\,\gamma\\ \beta\,\delta\end{pmatrix}_3.\qquad (\Sigma_1S_2=\mathsf{T}_3)$$

Wie man sieht, erhält man in allen Fällen dieselbe Regel; die Indizes 1, 2, 3 laufen immer von links nach rechts (was nicht zutreffen würde, wenn wir die Zuordnung von Transformationen und Formen nicht so erklärt hätten, daß die unabhängigen Veränderlichen immer links stehen). Die Multiplikationsregel, die wir mit Hilfe der Koeffizientenmatrizen der Formen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ beschrieben hatten, läßt sich sehr einfach auch mit Hilfe der Veränderlichen erklären. Man schreibe die zu multiplizierenden Formen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ zunächst nebeneinander, z. B.

$$\left\{\begin{matrix}(\tilde x_1\tilde a+\tilde x_2\tilde b)\,\tilde v_2-\\ -(\tilde x_1\tilde c+\tilde x_2\tilde d)\,\tilde v_1\end{matrix}\right\}_1\cdot\left\{\begin{matrix}\tilde x_1(\tilde a\,\tilde v_2-\tilde c\,\tilde v_1)+\\ +\tilde x_2(\tilde b\,\tilde v_2-\tilde d\,\tilde v_1)\end{matrix}\right\}_2$$

oder

$$\left\{\begin{matrix}(u_1\alpha+u_2\beta)\,y_2-\\ -(u_1\gamma+u_2\delta)\,y_1\end{matrix}\right\}_1\cdot\left\{\begin{matrix}u_1(\alpha y_2-\gamma y_1)+\\ +u_2(\beta y_2-\delta y_1)\end{matrix}\right\}_2.$$

Nachdem man diese Summen der Form nach ausmultipliziert hat, ersetze man die in der Mitte stehenden Produkte

$$\tilde v_2\tilde x_1,\ \tilde v_2\tilde x_2,\ \tilde v_1\tilde x_1,\ \tilde v_1\tilde x_2$$

oder

$$y_2u_1,\ y_2u_2,\ y_1u_1,\ y_1u_2$$

der Reihe nach durch die Zahlen

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad -1;$$

und genau so verfahre man in den übrigen Fällen.

Offenbar bilden die hiermit erklärten Prozesse der „Multiplikation" einen geschlossenen Kreis von Operationen, die aus Formen der aufgezählten vier Typen immer wieder nur Formen eben dieser Typen (im besonderen Falle auch die Null) hervorgehen lassen.

Wie ohne weiteres ersichtlich, gilt *das Assoziationsgesetz der Multiplikation*:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \quad \{= \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\}. \tag{116}$$

Ferner ist die beschriebene Multiplikation mit der Addition gleichartiger Formen durch die beiden *Distributionsgesetze* verknüpft. Das heißt, gehören $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ zu einem und demselben Typus, sind sie also beide Formen vom Typus $[T]$ oder beide Formen vom Typus $[\mathsf{T}]$, oder von $[\Sigma]$ oder $[S]$, und bezeichnen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, sowie $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ nach (114) zulässige Produkte, so ist

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}, \quad (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}. \tag{117}$$

Addition und Multiplikation von Formen des Typus T können als ein Rechnen mit einem System komplexer Zahlen betrachtet werden, das sechzehn Einheiten enthält, und eben dasselbe gilt von Addition und Multiplikation von Formen des Typus T.

Wir bezeichnen die Haupteinheiten dieser beiden Systeme, die Formen

$$\boxed{\mathsf{E} = \tilde{x}_1\tilde{v}_2 - \tilde{x}_2\tilde{v}_1, \quad \mathsf{H} = u_1 y_2 - u_2 y_1} \tag{118}$$

als *Einheitsformen* unseres Operationssystems. Sie genügen identisch den Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,T &= T\,\mathsf{E} = T, \quad \mathsf{H}\mathsf{T} = \mathsf{T}\mathsf{H} = \mathsf{T}, \\ \mathsf{E}\,S &= S\,\mathsf{H} = S, \quad \mathsf{H}\Sigma = \Sigma\,\mathsf{E} = \Sigma. \end{aligned} \tag{119}$$

Den Kreis hiermit erklärten Operationen erweitern wir nunmehr noch durch Einführung eines Operationszeichens $(')$, durch das wir aus Formen $\mathfrak{A}$ der vier Typen $[T]$, $[\mathsf{T}]$, $[\Sigma]$, $[S]$ neue Formen $'\mathfrak{A}$ ableiten, die wiederum je einem der vier Typen angehören, und unter Anlehnung an die Formeln Nr. 32 wie folgt definiert werden:

$$\boxed{\begin{aligned} {}'T &= u_1 d y_2 - u_2 b y_2 + u_1 c y_1 - u_2 a y_1, && [\mathsf{T}] \\ {}'\mathsf{T} &= \tilde{x}_1\tilde{\delta}\tilde{v}_2 - \tilde{x}_2\tilde{\beta}\tilde{v}_2 + \tilde{x}_1\tilde{\gamma}\tilde{v}_1 - \tilde{x}_2\tilde{\alpha}\tilde{v}_1, && [T] \\ {}'\Sigma &= u_1 r\tilde{v}_2 - u_2 m\tilde{v}_2 + u_1 n\tilde{v}_1 - u_2 l\tilde{v}_1, && [\Sigma] \\ {}'S &= \tilde{x}_1\tilde{\varrho}y_2 - \tilde{x}_2\tilde{\mu}y_2 + \tilde{x}_1\tilde{\nu}y_1 - \tilde{x}_2\tilde{\lambda}y_1. && [S] \end{aligned}} \tag{120}$$

Diese Formen gehören also — wie angedeutet — der Reihe nach zu den Typen [T], [T], [Σ], [S]. Sie sind, abgesehen von der Bezeichnung der Veränderlichen, der Reihe nach *entgegengesetzt* gleich den Formen $\tilde{T}$, $\tilde{\mathsf{T}}$, $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{S}$, und entsprechen der Reihe nach den Zuordnungen von Quaternionenpaaren:

$$(121)\qquad \begin{array}{ll} u_1 d - u_2 b = u_1', & \\ -u_1 c + u_2 a = u_2', & ('T); \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \delta x_1 - \beta x_2 = x_1', & \\ -\gamma x_1 - \alpha x_2 = x_2', & ('\mathsf{T}); \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \tilde{r}\tilde{u}_1 - \tilde{m}\tilde{u}_2 = x_1', & \\ -\tilde{n}\tilde{u}_1 + \tilde{l}\tilde{u}_2 = x_2', & ('\Sigma); \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \tilde{x}_1\tilde{\varrho} - \tilde{x}_2\tilde{\mu} = u_1', & \\ -\tilde{x}_1\tilde{\nu} + \tilde{x}_2\tilde{\lambda} = u_2', & ('S), \end{array}$$

und schließlich auch, soweit diese Sinn haben, den Zuordnungen

$$(122)\qquad \left|\begin{matrix} zd-b \\ -zc+a \end{matrix}\right| = z', \qquad \left|\begin{matrix} \delta z-\beta \\ -\gamma z+\alpha \end{matrix}\right| = z',$$

$$\left|\begin{matrix} \tilde{r}\tilde{z}-\tilde{m} \\ -\tilde{n}\tilde{z}+\tilde{l} \end{matrix}\right| = z', \qquad \left|\begin{matrix} \tilde{z}\tilde{\varrho}-\tilde{\mu} \\ -\tilde{z}\tilde{\nu}+\tilde{\lambda} \end{matrix}\right| = z',$$

die im Falle des Nichtverschwindens der zu (106) gehörigen Nablafunktionen die Transformationen darstellen, die den Transformationen (106) der Reihe nach entgegengesetzt sind.

Wir wollen Formen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, die in der offenbar wechselseitigen Beziehung $\mathfrak{B} = {}'\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} = {}'\mathfrak{B}$ zueinander stehen, *zueinander komplementär* nennen. Dann sind die zwei Einheitsformen E und H zueinander komplementär

$$(123)\qquad {}'\mathsf{E} = \mathsf{H}, \qquad {}'\mathsf{H} = \mathsf{E}.$$

Ferner gilt die Regel:

Die komplementäre Form zu einem Produkt wird gefunden, indem man die komplementären Formen der Faktoren in umgekehrter Folge multipliziert.

In Zeichen:

$$(124)\qquad {}'(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = {}'\mathfrak{B} \cdot {}'\mathfrak{A}.$$

Endlich sind die zu komplementären Formen gehörigen Nablafunktionen einander gleich. Z. B. ist

$$(125)\qquad \left\{\begin{matrix} d & -c \\ -b & a \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{matrix}\right\}.$$

Wir führen nunmehr die Voraussetzung ein, daß die Nablafunktionen

$$(126)\qquad \{T\}=\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix},\quad \{\mathsf{T}\}=\begin{Bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{Bmatrix},$$
$$\{\Sigma\}=\begin{Bmatrix} l & m \\ n & r \end{Bmatrix},\quad \{S\}=\begin{Bmatrix} \lambda & \nu \\ \mu & \varrho \end{Bmatrix}$$

von Null verschieden sind.

Dann können wir, nach Analogie der gewöhnlichen Theorie linearer Formen, zu weiteren Begriffsbildungen schreiten. Zunächst können wir dann eindeutig mit T^{-1}, T^{-1}, S^{-1}, Σ^{-1} zu bezeichnende Formen definieren, die den symbolischen Gleichungen

$$(127)\qquad \boxed{\begin{aligned} T^{-1}T=TT^{-1}=\mathsf{E}, &\quad \mathsf{T}^{-1}\mathsf{T}=\mathsf{T}\mathsf{T}^{-1}=\mathsf{H},\\ S^{-1}S=\Sigma\Sigma^{-1}=\mathsf{H}, &\quad S S^{-1}=\Sigma^{-1}\Sigma=\mathsf{E}\end{aligned}}$$

genügen, und daher zu den Formen T, T, S, Σ *reziprok* zu nennen sind. Die zu ihnen gehörigen Quaternionenmatrizen und Nablafunktionen sind reziprok zu denen der Formen T, T, S, Σ, sie selbst aber gehören, nach (115), zu den Formentypen $[T]$, $[\mathsf{T}]$, $[\Sigma]$, $[S]$. Insbesondere wird

$$(128)\qquad \mathsf{E}^{-1}=\mathsf{E},\quad \mathsf{H}^{-1}=\mathsf{H}.$$

Ferner gilt allgemein

$$(129)\qquad (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1}=\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}$$

und

$$(130)\qquad ({}'\mathfrak{A})^{-1}={}'(\mathfrak{A}^{-1}),$$

so daß man für den letzten Ausdruck ohne Mehrdeutigkeit ${}'\mathfrak{A}^{-1}$ schreiben kann.

Die Formen

$${}'T^{-1},\quad {}'\mathsf{T}^{-1},\quad {}'S^{-1},\quad {}'\Sigma^{-1},$$

(*die der Reihe nach den Typen*

$$[\mathsf{T}],\quad [T],\quad [\Sigma],\quad [S]$$

angehören) *nennen wir mit den entsprechenden Formen*

$$T,\quad \mathsf{T},\quad S,\quad \Sigma$$

verschwistert.

Es gilt die Regel:

Die mit einem Produkt verschwisterte Form wird gefunden, indem man die mit seinen Faktoren verschwisterten Formen in derselben Reihenfolge wie diese multipliziert.

In Zeichen:

$$(131) \qquad {}'(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} = {}'\mathfrak{A}^{-1} \cdot {}'\mathfrak{B}^{-1}.$$

Natürlich ist auch

$$(132) \qquad {}'\mathsf{E}^{-1} = \mathsf{H}, \qquad {}'\mathsf{H}^{-1} = \mathsf{E}.$$

Wir gehen jetzt in der Spezialisierung unserer Voraussetzungen noch einen Schritt weiter:

Wir nehmen nunmehr an, daß

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{pmatrix} l & m \\ n & r \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ \mu & \varrho \end{pmatrix}$$

verschwisterte Quaternionenmatrizen sind. (§ 3, S. 20.)

Dann wird zunächst

$$(133) \qquad \boxed{\begin{aligned} {}'T &= \mathsf{T}^{-1}, & {}'\mathsf{T} &= T^{-1}, \\ {}'S &= \Sigma^{-1}, & {}'\Sigma &= S^{-1}, \end{aligned}}$$

was man auch durch die Gleichungen

$$(134) \qquad \begin{aligned} {}'\mathsf{T} \cdot T = T \cdot {}'\mathsf{T} &= \mathsf{E}, & {}'T \cdot \mathsf{T} = \mathsf{T} \cdot {}'T &= \mathsf{H}, \\ {}'\Sigma \cdot S = \Sigma \cdot {}'S &= \mathsf{H}, & {}'S \cdot \Sigma = S \cdot {}'\Sigma &= \mathsf{E} \end{aligned}$$

ausdrücken kann. (S. Nr. 127.)

Die in dieser Beziehung stehenden Formen T und T sind also verschwistert, und ebenso die Formen Σ und S. Daher sind auch die Produkte

$$\begin{aligned} T_1 T_2 &\text{ und } \mathsf{T}_1 \mathsf{T}_2, & T_1 S_2 &\text{ und } \mathsf{T}_1 \Sigma_2, \\ S_1 \Sigma_2 &\text{ und } \Sigma_1 S_2, & S_1 \mathsf{T}_2 &\text{ und } \Sigma_1 T_2 \end{aligned}$$

miteinander verschwistert.

Wir erinnern uns jetzt der in der projektiven Geometrie üblichen Terminologie. Dort spricht man ja nicht von linearen Transformationen von Punkten (x) und solchen von Ebenen (u), sondern man faßt Zuordnungen beider Arten zu einem einzigen Begriff „Kollineation“ (oder Korrelation) zusammen; man spricht von einer einzigen „Transformation“, die nur auf verschiedene Raumelemente angewendet wird. Und diese Raumelemente sind dann nicht nur Punkte (x) oder Ebenen (u), sondern es können auch noch zahllose andere Figuren sein, z. B. die Zusammenfassung der Figuren Punkt und Ebene, Zusammenfassungen von mehreren,

auch unendlich vielen, Punkten und Ebenen, — gerade Linien, Kurven, Flächen, Linienkomplexe usw.

Dieses inhaltsreichen Transformationsbegriffs wollen nun auch wir uns bedienen.

Wir fassen vor allem die Zuordnungen T und T, $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1', x_2')$, $(u_1, u_2) \rightarrow (u_1', u_2')$ zu einer einzigen „*Transformation*" zusammen, der wir dann ein neues Zeichen, $\mathfrak{T}$, beilegen wollen. Ebenso verfahren wir mit S und Σ: Die verschiedenen Zuordnungen

$$(x_1, x_2) \rightarrow (u_1', u_2'), \qquad (u_1, u_2) \rightarrow (x_1', x_2')$$

sollen ebenfalls zu einer einzigen „*Transformation*" $\mathfrak{S}$ zusammengefaßt werden. Die Transformationen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$, die auch noch auf zusammengesetzte Figuren (wie $x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots; u_1, u_2; \ldots$) angewendet werden können, bilden dann *eine geschichtete Gruppe* $\mathfrak{G}_{16}, \mathfrak{H}_{16}$, deren allgemeine Transformation (aus $\mathfrak{G}_{16}$ oder $\mathfrak{H}_{16}$) von *sechzehn* Parametern abhängt. Und zu dieser Gruppe sind die früher von uns betrachteten Gruppen G_{15}, H_{15} und $\Gamma_{15}, \mathsf{H}_{15}$ *meromorph*.

Der Invariantentheorie der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}, \mathfrak{H}_{16}$ gehören u. a. die folgenden Formeln an, in denen nunmehr $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$ und ebenso $(u_1, u_2), (v_1, v_2), \ldots$ gleichartig[35]) zu transformierende Paare von Quaternionen bedeuten und die durch die Formeln (126) erklärten Nablafunktionen $\{T\}, \{\mathsf{T}\}$ und $\{\Sigma\}, \{S\}$ den Gleichungen

$$\{T\}\cdot\{\mathsf{T}\} = 1, \qquad \{\Sigma\}\cdot\{S\} = 1 \tag{135}$$

genügen:

$$\mathfrak{T} = (T, \mathsf{T}):$$

$$\boxed{\begin{gathered} u_1 x_2 - u_2 x_1 = u_1' x_2' - u_2' x_1', \\ \{T\}\cdot\begin{Bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1' y_1' \\ x_2' y_2' \end{Bmatrix}, \qquad \{\mathsf{T}\}\cdot\begin{Bmatrix} u_1 v_1 \\ u_2 v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1' v_1' \\ u_2' v_2' \end{Bmatrix}, \end{gathered}} \tag{136}$$

$$\mathfrak{S} = (\Sigma, S):$$

$$\boxed{\begin{gathered} \tilde{x}_1 \tilde{u}_2 - \tilde{x}_2 \tilde{u}_1 = u_1' x_2' - u_2' x_1', \\ \{\Sigma\}\cdot\begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \tilde{v}_1 \\ \tilde{u}_2 \tilde{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1' y_1' \\ x_2' y_2' \end{Bmatrix}, \qquad \{S\}\cdot\begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 \\ \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1' v_1' \\ u_2' v_2' \end{Bmatrix}. \end{gathered}} \tag{137}$$

---

[35]) Der übliche Terminus hierfür ist *kogredient*. Ich vermeide aber lieber dieses Wort, da der korrelative Begriff der *kontragredienten* Transformation hier durch einen zwar nahe verwandten, aber doch verschiedenen Begriff ersetzt ist, den der verschwisterten Formen und Transformationen.

Insbesondere zieht also in beiden Fällen die Gleichung $u_1 x_2 - u_2 x_1 = 0$ die entsprechende Gleichung zwischen den transformierten Veränderlichen nach sich.

Den *Charakter der Invarianz* gegenüber den Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}, \mathfrak{H}_{16}$ haben unter anderem auch die erklärten Produktbildungen, während anderen Produkten, die man der Form nach ebenso erklären kann, diese Eigenschaft nicht zukommt.

Die folgende Tafel zeigt, was entsteht, wenn man auf Formen T_0, T_0, S_0, Σ_0 unserer vier Typen eine Transformation $\mathfrak{T} = (T, \mathsf{T})$ oder eine Transformation $\mathfrak{S} = (S, \Sigma)$ anwendet:

(138)

$$\underline{\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}_0\mathfrak{T} = \mathfrak{A}_*:}$$

$$T^{-1}T_0T = T_*, \qquad \mathsf{T}^{-1}\mathsf{T}_0\mathsf{T} = \mathsf{T}_*,$$
$$T^{-1}S_0\mathsf{T} = S_*, \qquad \mathsf{T}^{-1}\Sigma_0 T = \Sigma_*;$$

$$\underline{\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}_0\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_*:}$$

$$S^{-1}T_0S = \mathsf{T}_*, \qquad \Sigma^{-1}\mathsf{T}_0\Sigma = T_*.$$
$$S^{-1}S_0\Sigma = \Sigma_*, \qquad \Sigma^{-1}\Sigma_0 S = S_*.$$

Es ist einerlei, ob man erst zwei Formen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ transformiert und aus den transformierten Formen *unter der Einschränkung* (114) das Produkt bildet, oder ob man, nach der Regel (138), sogleich das Produkt $\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2$ transformiert. Es sei z. B. $\Sigma_1 S_2 = \mathsf{T}_3$, und $\mathfrak{S}$ das Symbol einer auszuführenden Transformation, das Zeichen des Operators. Dann ist

$$(\Sigma^{-1}\Sigma_1 S)\cdot(S^{-1}S_2\Sigma) = \Sigma^{-1}(\Sigma_1 S_2)\Sigma = \Sigma^{-1}\mathsf{T}_3\Sigma.$$

Nicht-invariant gegenüber $\mathfrak{G}_{16}, \mathfrak{H}_{16}$ und daher zunächst von geringerem Interesse sind alle in der Tafel (114) nicht aufgezählten Produktbildungen, also Produkte, wie $T_1\mathsf{T}_2$, S_1S_2, u. a. m. Siehe jedoch § 9.

Wie schon angedeutet worden ist, ist für den wesentlichsten Teil des hier Vorgetragenen das in der Theorie der gewöhnlichen bilinearen Formen Übliche vorbildlich gewesen. Siehe insbesondere Frobenius, Journal für Mathematik **84** (1877), S. 1. Doch gilt das nicht auch von der Unterscheidung von vier Arten bilinearer Formen und zweierlei Einheitsformen, und allem, was damit zusammenhängt. Man hat den reichen Stoff der Theorie der bilinearen Formen nicht so geordnet, wie es das Bedürfnis der Geometrie erfordert haben würde, nämlich nicht so, daß *Invarianten* bestimmter Gruppen zusammengestellt werden. Statt dessen hat man auf den formalen Charakter der auszuführenden Rechnungsoperationen das Hauptgewicht gelegt. Es hat aber z. B. unser Symbol $'\mathfrak{A}$ ganz gleiche Eigenschaften wie das Symbol $\mathfrak{A}'$ der Frobeniusschen Theorie, während es *auch formal* anders erklärt ist. Also ist die formale Seite einer solchen Definition nicht das, worauf es ankommt.

Mit dem Vorgetragenen vergleiche man den Inhalt der §§ 11, 12 und 15 Seiten 129—133 und 166—169) in des Verfassers Lehrbuch der Invariantentheorie. Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen. Braunschweig, 923.)

Werden statt der Gleichungen (112) Systeme von m („einseitigen") linearen Gleichungen (Systeme von je $4m$ Gleichungen) mit m^2 Quaternionenkoeffizienten berachtet, so treten viel verwickeltere, aber, wie ich glaube, nicht uninteressante Verhältnisse ein, und weitere Verwickelungen kommen hinzu, wenn man die reellen Quaternionen durch andere Systeme komplexer Zahlen ersetzt. Auf diesen sehr umfangreichen Stoff kann natürlich hier nicht eingegangen werden.

(Fortsetzung folgt.)

(Eingegangen am 26. September 1923.)

Modulsysteme und Differentialgleichungen.

Von

E. Fischer in Köln.

Wenn eine lineare Differentialoperation in n Variablen ganze rationale Funktionen zu Koeffizienten hat, so ergibt sie, angewendet auf eine ganze rationale Funktion, immer wieder eine ganze rationale Funktion. Ist sie nun von der Besonderheit, daß sie, angewendet auf eine Form (d. h. homogene ganze rationale Funktion) von irgendeinem Grade s, immer wieder eine Form und zwar von demselben Grade s ergibt, so ruft sie zwischen den Koeffizienten der Formen vom Grade s eine lineare Substitution hervor. Indem man diese Substitution analysiert und dann die Resultate in die Sprache der linearen Differentialoperationen zurückübersetzt, gelangt man zu gewissen Sätzen, die auf verschiedene klassische Probleme der Algebra ein neues Licht werfen.

Untersuchungen solcher Art habe ich in einigen Abhandlungen[1]) dargestellt. Zu verschiedenen Zeiten entstanden, weichen dieselben in Methode und Gedankengang erheblich voneinander ab. Es scheint mir deshalb nicht überflüssig, nunmehr eine einheitliche zusammenfassende Darstellung nachfolgen zu lassen; sie ist nach einem neuen Plane angelegt und vielleicht bequemer zugänglich als die früheren. Der Inhalt der §§ 13—16 war in den erwähnten Abhandlungen noch nicht enthalten.

[1]) Über algebraische Modulsysteme und lineare homogene partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Crelle **140** (1911); Über die Endlichkeit der Invarianten (Brief an Hilbert), Gött. Nachr. 1915; Über die Differentiationsprozesse der Algebra, Crelle **148** (1918). Im folgenden zitiert als D_{11}, D_{15}, D_{18}. Die gegenwärtigen §§ 13–16 bestehen aus vor D_{18} entstandenen direkt an D_{11} anknüpfenden Überlegungen. — Vgl. auch den kurzen Bericht, der auf der Leipziger Tagung der deutschen Mathematikervereinigung vorgetragen wurde und in deren Jahresberichten abgedruckt wird.

§ 1.

Über Polarenprozesse im allgemeinen.

Die Darstellung gestaltet sich übersichtlicher, wenn man bei den einleitenden Erörterungen statt ganzer rationaler Funktionen allgemeiner Potenzreihen zugrunde legt und die Spezialisierung erst in der entscheidenden Phase der Untersuchung vornimmt.

Wir betrachten also gewöhnliche Potenzreihen der n komplexen Variablen $x_1, \ldots, x_n$, d. h. solche, deren Exponenten ganze rationale nichtnegative Zahlen und deren Koeffizienten komplexe Zahlen sind. Wir legen aber den Koeffizienten keinerlei Beschränkung auf, betrachten also die Potenzreihen rein formal ohne Rücksicht auf Konvergenz. Eine solche formale Betrachtung hat einen Sinn, indem Summe und Produkt zweier Potenzreihen wieder als bestimmte Potenzreihen definiert sind. Die Definition einer Summe von unendlich vielen Potenzreihen brauchen wir nur für den Fall, daß jedes einzelne Potenzprodukt der Variablen bloß in endlich vielen der Summanden mit von 0 verschiedenem Koeffizienten auftritt. — Wir haben ferner noch solche Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ zu betrachten, deren Koeffizienten selbst Potenzreihen von Parametern $u_1, \ldots, u_n$ sind. Dann sind die erwähnten Definitionen auf das System der $2n$ Variablen $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n$ zu beziehen; es erscheint also schon die Potenzreihe selbst als das Resultat einer nach jener Definition ausführbaren Summation; und eine Summe von unendlich vielen Potenzreihen der neuen Art ist in dem Falle definiert, wo jedes einzelne Potenzprodukt der $2n$ Variablen nur in endlich vielen der Summanden mit von 0 verschiedenem Koeffizienten auftritt. — Außer der Addition und Multiplikation ist für formale Potenzreihen noch die Differentiation erklärt; ist $F(x)$ eine Potenzreihe und $\mathfrak{P}(x) = x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}$ ein Potenzprodukt, so ist also $\frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_n} F(x)}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}$ eine bestimmte Potenzreihe, und wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$. — Endlich hat, obwohl die Einsetzung spezieller Wertsysteme der Variablen in die Potenzreihe $F(x)$ im allgemeinen sinnlos ist, die Einsetzung von $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ einen Sinn; sie ergibt einen bestimmten Koeffizienten von $F(x)$, den wir daher mit $F(0)$ oder $[F(x)]_{x=0}$ bezeichnen.

Über die Bezeichnung des Konjugiertkomplexen treffen wir folgende Verabredung. Ist a eine komplexe Zahl, so bezeichnet $\bar{a}$ die konjugiertkomplexe. Ist $F(x)$ eine Potenzreihe, so bezeichnet $\bar{F}(x)$ diejenige Potenzreihe derselben Variablen, welche die konjugiertkomplexen Koeffizienten hat; wollte man also auch die Variablen konjugiertkomplex nehmen, so müßte man schreiben $\bar{F}(\bar{x})$. — Hier gestatte ich mir folgende

Bemerkung: Werden Parameter oder Potenzreihen neu eingeführt, so ist es an sich gleichgültig, ob man sie mit y oder mit $\bar{y}$, bzw. mit $f(x)$ oder mit $\bar{f}(x)$ bezeichnet; ich werde mich aber bei der Auswahl der Bezeichnungen von der Nebenabsicht leiten lassen, gewissen Invarianzverhältnissen Rechnung zu tragen, auf die ich gelegentlich noch aufmerksam machen werde, deren Beachtung aber für unseren Hauptzweck belanglos ist.

Unser Ansatz wird nun drei Grundbegriffe benützen: Faltung, lineare Substitution, Polarenprozeß.

Die *Faltung* $\bar{F}(\cdot)\,G(\cdot)$ zweier Potenzreihen $\bar{F}(\bar{x})$ und $G(x)$ der $\bar{x}$ bzw. x definieren wir zunächst für den Fall, daß jede von ihnen sich auf ein Glied reduziert:

$$\text{für} \quad \bar{F}(\bar{x}) = \bar{a}\,\mathfrak{P}(\bar{x}), \quad G(x) = b\,\mathfrak{Q}(x)$$

$$\text{sei:} \quad \bar{F}(\cdot)\,G(\cdot) = \left[\bar{a}\,b\,\mathfrak{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{Q}(x)\right]_{x=0}$$

($\bar{a}$, b Konstante; $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{Q}(x)$ Potenzprodukte). Danach ist die Faltung $\mathfrak{P}(\cdot)\,\mathfrak{Q}(\cdot)$ zweier Potenzprodukte $\mathfrak{P}(\bar{x})$ und $\mathfrak{Q}(x)$ stets 0, wenn $\mathfrak{Q}(x)$ von $\mathfrak{P}(x)$ verschieden ist, da entweder schon die Differentiation oder aber die darauffolgende Nullsetzung der Variablen 0 liefert. Dagegen hat man für $\mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{P}(x)$, wenn $\mathfrak{P}(x) = x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}$ gesetzt wird, $\mathfrak{P}(\cdot)\,\mathfrak{P}(\cdot) = \nu_1! \dots \nu_n!$. Nennen wir daher

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}}{\sqrt{\nu_1! \dots \nu_n!}}$$

ein normiertes Potenzprodukt und bezeichnen die sämtlichen normierten Potenzprodukte in irgend einer festen Reihenfolge mit

$$\mathfrak{p}_1(x), \ \mathfrak{p}_2(x), \dots,$$

so ist

$$\mathfrak{p}_\alpha(\cdot)\,\mathfrak{p}_\beta(\cdot) = \begin{cases} = 1 & \text{für} \quad \alpha = \beta \\ = 0 & \text{für} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Nun definieren wir allgemeiner die Faltung von zwei beliebigen Potenzreihen durch die Bestimmung, daß gliedweise zu falten ist und die Resultate zu summieren sind; ist also

$$\bar{F}(\bar{x}) = \sum_\alpha \bar{a}_\alpha\,\mathfrak{p}_\alpha(\bar{x}), \qquad G(x) = \sum_\beta b_\beta\,\mathfrak{p}_\beta(x),$$

worin wir übrigens die $\bar{a}_\alpha$ und b_β die normierten Koeffizienten von $\bar{F}(x)$ und $G(x)$ nennen wollen, so sei

$$\bar{F}(\cdot)\,G(\cdot) = \sum_{\alpha,\beta} \bar{a}_\alpha\,b_\beta\,\mathfrak{p}_\alpha(\cdot)\,\mathfrak{p}_\beta(\cdot) = \sum_\nu \bar{a}_\nu\,b_\nu.$$

Der Begriff ist anwendbar, wenn diese $\sum_\nu$ abbricht (d. h. höchstens endlich

viele von 0 verschiedene Glieder hat), also jedenfalls dann, wenn eine der beiden Potenzreihen abbricht; oder aber, wenn die $\bar{a}_\nu$ und b_ν solche Potenzreihen von Parametern sind, daß die Summation $\sum_\nu \bar{a}_\nu b_\nu$ im Sinne jener Definition ausführbar ist. Man hat:

$$\bar{F}(\cdot)\, G(\cdot) = G(\cdot)\, \bar{F}(\cdot) = \bar{G}(\cdot)\, \bar{F}(\cdot),$$
$$\bar{a}_\alpha = \bar{F}(\cdot)\, \mathfrak{p}_\alpha(\cdot).$$

Ist ferner $F(x)$ eine abbrechende Potenzreihe mit konstanten Koeffizienten, so ist

$$\bar{F}(\cdot)\, F(\cdot) = \sum_\alpha \bar{a}_\alpha a_\alpha$$

stets reell und $\geqq 0$, und nur dann $= 0$, wenn $F(x)$ identisch verschwindet. Ist für zwei Potenzreihen $\bar{F}(\bar{x})$ und $G(x)$ die Faltung $F(\cdot)\, G(\cdot)$ vorhanden und $= 0$, so heißen $F(x)$ und $G(x)$ *orthogonal*; zu sich selbst orthogonal ist also nur die identisch verschwindende Potenzreihe.

Um eine *lineare Substitution* K im Raume der Potenzreihen zu erklären, denken wir uns eine unendliche Matrix

$$\begin{matrix} k_{11},\ k_{12}, \ldots \\ k_{21},\ k_{22}, \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}$$

mit konstanten Elementen gegeben und ordnen nun jeder Potenzreihe

$$G(x) = \sum_\beta b_\beta \mathfrak{p}_\beta(x)$$

eine Potenzreihe

$$M(x) = \sum_\alpha m_\alpha \mathfrak{p}_\alpha(x)$$

zu durch die Festsetzung:

$$\begin{aligned} m_1 &= k_{11} b_1 + k_{12} b_2 + \ldots \\ m_2 &= k_{21} b_1 + k_{22} b_2 + \ldots \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Damit diese Festsetzung für jede Potenzreihe $G(x)$ einen Sinn hat, setzen wir die Matrix als zeilenfinit voraus, d. h. so, daß in jeder einzelnen Horizontalreihe höchstens endlich viele von 0 verschiedene Elemente stehen. Eine Zuordnung K, die sich in dieser Weise vermittelst einer Matrix konstruieren läßt, heißt eine lineare Substitution; die zugeordnete Potenzreihe wird mit $K\, G(x)$ bezeichnet:

$$M(x) = K\, G(x) = \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} \mathfrak{p}_\alpha(x)\, b_\beta.$$

Die Aufeinanderfolge mehrerer linearer Substitutionen ist wieder eine lineare Substitution, da das Produkt zeilenfiniter Matrices wieder zeilenfinit ist.

Die lineare Substitution K kann nun durch eine Faltung bewirkt werden. Bildet man nämlich die Potenzreihe

$$K(x;\,\bar{y}) = \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}\,\mathfrak{p}_\alpha(x)\,\mathfrak{p}_\beta(\bar{y})$$

in $2n$ Variablen und faltet sie nach den $\bar{y}$ mit $G(\bar{y})$, so erhält man

$$K\,G(x) = K(x;\,\cdot)\,G(\cdot).$$

Da durch die lineare Substitution K die Matrix $(k_{\alpha\beta})$ zurückbestimmt ist, können wir $K(x;\,\bar{y})$ den Kern der linearen Substitution K nennen.

Der Kern der identischen Substitution ist:

$$E(x;\,\bar{y}) = \sum_{\nu} \mathfrak{p}_\nu(x)\,\mathfrak{p}_\nu(\bar{y}),$$

es ist also stets

$$E(x;\,\cdot)\,G(\cdot) = G(x);$$

$E(x;\,\bar{y})$ ist eine konvergente Potenzreihe mit dem Werte

$$E(x;\,\bar{y}) = e^{x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n}. \tag{1}$$

Zur Bestimmung des Kernes bei gegebener linearer Substitution K dient:

$$K\,E(x;\,\bar{y}) = K(x;\,\bar{y}). \tag{2}$$

Ist noch eine abbrechende Potenzreihe

$$\bar{F}(\bar{x}) = \sum_{\alpha} \bar{a}_\alpha\,\mathfrak{p}_\alpha(\bar{x})$$

gegeben, so hat die bilineare Form $\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}\,\bar{a}_\alpha\,b_\beta$ der $\bar{a}_\alpha$ und b_β nur endlich viele Glieder und die Bedeutung:

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}\,\bar{a}_\alpha\,b_\beta = \bar{F}(\cdot)\,M(\cdot).$$

Um einen *Polarenprozeß* zu erklären, denken wir uns eine unendliche Matrix

$$\begin{matrix} c_{11}, & c_{12}, & \cdots \\ c_{21}, & c_{22}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{matrix}$$

mit konstanten Elementen gegeben und ordnen nun jeder Potenzreihe $G(x)$ eine Potenzreihe $M(x)$ durch die Festsetzung:

$$M(x) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\,\mathfrak{p}_\alpha(x)\,\mathfrak{p}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x)$$

zu. Damit diese Zuordnung für jede Potenzreihe $G(x)$ einen Sinn hat, setzen wir die Matrix als zeilenfinit voraus. Eine Zuordnung, die sich auf diese Weise mittelst einer Matrix oder, anders ausgedrückt, mittelst einer Potenzreihe

3) $$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\,\mathfrak{p}_\alpha(x)\,\mathfrak{p}_\beta(\bar{y})$$

n $2n$ Variablen konstruieren läßt, heißt ein Polarenprozeß.

Ein Polarenprozeß ist offenbar zugleich eine lineare Substitution K. Um ihren Kern $K(x;\bar{y})$ zu bestimmen, haben wir nach (2) den Polarenprozeß auf die Potenzreihe (1) anzuwenden; da aber z. B. $\frac{\partial}{\partial x_1} e^{x_1\bar{y}_1+\cdots+x_n\bar{y}_n} = \bar{y}_1 \cdot e^{x_1\bar{y}_1+\cdots+x_n\bar{y}_n}$ ist, so wird $K(x;\bar{y})$ das Produkt der Potenzreihen (3) und $E(x;\bar{y})$.

Um für den Polarenprozeß eine bequeme Bezeichnung zu gewinnen, führen wir für die Potenzreihe (3) ein Funktionszeichen ein und ersetzen darin $\bar{y}$ durch $\frac{\partial}{\partial x}$. Dabei wollen wir uns aber bezüglich der Reihenfolge, in der wir die Argumente im Funktionszeichen aufführen, volle Freiheit wahren; je nachdem wir also (3) mit $f(x;y)$ oder mit $g(y;x)$ bezeichnen, werden wir den Polarenprozeß mit $f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)$ oder mit $g\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right)$ bezeichnen:

$$M(x) = K\,G(x) = f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)G(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right)G(x).$$

Die durch $\frac{\partial}{\partial x}$ angedeuteten Differentiationen sind also immer nur an $G(x)$, nicht aber an den im Funktionszeichen f oder g auftretenden Argumenten x auszuführen.)

Der Kern $K(x;\bar{y})$ des Polarenprozesses $f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)$ ist also durch

4) $$K(x;\bar{y}) = f(x;\bar{y})\cdot E(x;\bar{y})$$

gegeben. Daraus folgt aber wegen (1)

5) $$f(x;\bar{y}) = K(x;\bar{y})\cdot E(-x;\bar{y}),$$

die Potenzreihe $f(x;\bar{y})$ und die Matrix $(c_{\alpha\beta})$ sind also durch den Polarenprozeß K zurückbestimmt.

Ist umgekehrt eine beliebige lineare Substitution K mit dem Kerne $K(x;\bar{y})$ gegeben, und definiert man $f(x;\bar{y})$ durch (5), so ist die zugehörige Matrix $(c_{\alpha\beta})$ zeilenfinit, und da aus (5) wieder (4) folgt, so ist der Polarenprozeß $f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)$ mit K identisch. *Die Begriffe lineare Substitution und Polarenprozeß sind also völlig identisch.* Daher liefert auch die Aufeinanderfolge mehrerer Polarenprozesse wieder einen Polarenprozeß.

Indem wir den durch die Matrix $(c_{\alpha\beta})$ gegebenen Polarenprozeß durch Vermittlung von (4) als die durch die Matrix $(k_{\alpha\beta})$ gegebene lineare Substitution auffassen, ist die Untersuchung auf Betrachtungen zurückgeführt, in denen die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ keine wesentliche Rolle mehr spielen,

und die in dem für uns nötigen Ausmaße als aus der Theorie der Matrice bekannt gelten können. Wir werden aber doch auch bei diesen Be trachtungen die bequeme Sprache der Potenzreihen von Variablen $x_1, \ldots, x$ beibehalten.

§ 2.

Spiegelbildliche Paare von Polarenprozessen.

Wir werden nun immer die beiden linearen Substitutionen K und $\bar{K}'$ welche den Matrices

$$\begin{matrix} k_{11},\ k_{12}, \ldots \\ k_{21},\ k_{22}, \ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \bar{k}_{11},\ \bar{k}_{21}, \ldots \\ \bar{k}_{12},\ \bar{k}_{22}, \ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}$$

entsprechen, nebeneinander betrachten. Dazu müssen wir voraussetzen daß die erste Matrix nicht bloß zeilenfinit, sondern auch spaltenfinit ist d. h. so, daß auch in jeder Vertikalreihe höchstens endlich viele von verschiedene Elemente stehen, m. a. W. daß für jede abbrechende Potenz reihe $G(x)$ auch $KG(x)$ abbricht. Das Verhältnis der beiden linearen Substitutionen ist ein gegenseitiges, wir nennen sie *Spiegelbilder* von einander.

Hat K den Kern $K(x; \bar{y})$, so hat $\bar{K}'$ den Kern $\bar{K}(\bar{y}; x)$:

$$KG(x) = K(x; \cdot)\, G(\cdot),$$
$$\bar{K}' F(x) = \bar{K}(\cdot\,; x)\, F(\cdot).$$

Daraus folgt nach (5) und (1), daß, wenn K als Polarenprozeß $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aufgefaßt wird, $\bar{K}'$ der Polarenprozeß $\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right)$ ist:

$$K = f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \bar{K}' = \bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right).$$

Die zugehörigen Matrices hängen also nach dem Schema

$$\begin{matrix} c_{11}, c_{12}, \ldots \\ c_{21}, c_{22}, \ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \bar{c}_{11}, \bar{c}_{21}, \ldots \\ \bar{c}_{12}, \bar{c}_{22}, \ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}$$

zusammen; sie sind zeilen- und spaltenfinit. — Ist umgekehrt $(c_{\alpha\beta})$ eine zeilen- und spaltenfinite Matrix, so sind die zugehörigen Polarenprozesse $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ und $\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right)$ lineare Substitutionen, die Spiegelbilder voneinander sind.

Bricht nun von den beiden Potenzreihen

$$F(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha \mathfrak{p}_\alpha(x), \quad G(x) = \sum_{\beta} b_\beta \mathfrak{p}_\beta(x)$$

wenigstens eine ab, so hat die bilineare Form der $\bar{a}_\alpha$ und b_β

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}\,\bar{a}_\alpha\, b_\beta$$

nur endlich viele Glieder und, wenn

$$\begin{aligned} M(x) &= K\,G(x), \\ N(x) &= \overline{K}'\,F(x) \end{aligned} \tag{6}$$

gesetzt wird, die Bedeutung $\overline{F}(\cdot)\,M(\cdot)$, sowie die Bedeutung $\overline{N}(\cdot)\,G(\cdot)$.

Aus (6) *folgt daher, falls* $F(x)$ *oder* $G(x)$ *abbricht, die Beziehung*

$$\overline{F}(\cdot)\,M(\cdot) = G(\cdot)\,\overline{N}(\cdot). \tag{7}$$

Aus dieser (übrigens für Spiegelbilder charakteristischen) Beziehung ziehen wir einige unmittelbare Folgerungen, die wir als Satz I zusammenfassen.

Unter einer *Nullösung von* K verstehen wir eine Potenzreihe $\Psi(x)$, die der Gleichung

$$0 = K\,\Psi(x)$$

genügt (also Lösung der „linearen homogenen Differentialgleichung“ $f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x) = 0$ ist). Unter einer *durch* K *erzeugbaren* Potenzreihe verstehen wir eine Potenzreihe $M(x)$, die sich durch geeignete Wahl einer Potenzreihe $G(x)$ in die Gestalt

$$M(x) = K\,G(x)$$

bringen läßt (für die also die „lineare unhomogene Differentialgleichung“ $f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)G(x) = M(x)$, in der $G(x)$ die gesuchte Potenzreihe ist, lösbar ist).

Zur Abkürzung bezeichnen wir mit R die lineare Substitution

$$R = K\overline{K}',$$

mit

$$R(x;\,\bar{y}) = \sum_{\mu,\alpha} r_{\mu\alpha}\,\mathfrak{p}_\mu(x)\,\mathfrak{p}_\alpha(\bar{y})$$

ihren Kern

$$R(x;\,\bar{y}) = K(x;\,\cdot)\,\overline{K}(\bar{y};\,\cdot).$$

Satz I. *Jede abbrechende Nullösung von* K *ist zu jeder durch* $\overline{K}'$ *erzeugbaren Potenzreihe orthogonal. Wenn eine abbrechende Potenzreihe zugleich Nullösung von* K *und durch* $\overline{K}'$ *erzeugbar ist, so verschwindet sie identisch. Die abbrechenden Nullösungen von* $R = K\overline{K}'$ *sind mit den abbrechenden Nullösungen von* $\overline{K}'$ *identisch*[2]. *Für eine abbrechende Potenzreihe*

$$F(x) = \sum_\alpha a_\alpha\,\mathfrak{p}_\alpha(x)$$

[2]) Dies läuft auf den Satz über endliche rechteckige Matrices $\mathfrak{R}$ hinaus, daß $\mathfrak{R}\,\overline{\mathfrak{R}}'$ und $\overline{\mathfrak{R}}'$ gleichen Rang haben.

ist die Hermitesche Form

$$\sum_{\mu,\alpha} r_{\mu\alpha}\,\bar{a}_\mu\,a_\alpha$$

der a_α reellwertig (d. i. $r_{\alpha\mu} = \bar{r}_{\mu\alpha}$) und $\geqq 0$ und nur dann $= 0$, wenn $F(x)$ eine Nullösung von $\bar{K}'$ ist. Natürlich gelten[3]) *auch die dazu spiegelbildlichen Aussagen.*

Beweis. Aus den Annahmen

$$0 = K\Psi(x),$$

$$N(x) = \bar{K}'F(x)$$

folgt, falls $\Psi(x)$ oder $F(x)$ abbricht, nach (7):

$$0 = \Psi(\cdot)\,\bar{N}(\cdot).$$

Ist hierin speziell

$$\Psi(x) = N(x),$$

so folgt

$$0 = N(\cdot)\,\bar{N}(\cdot), \quad \text{also} \quad N(x) = 0.$$

Nur ein anderer Ausdruck dafür ist: aus der Annahme

$$0 = K\bar{K}'F(x)$$

folgt unter der Voraussetzung, daß $F(x)$ oder wenigstens $\bar{K}'F(x)$ abbricht,

$$0 = \bar{K}'F(x).$$

Daß umgekehrt jede abbrechende Nullösung von $\bar{K}'$ auch eine solche von $K\bar{K}'$ ist, ist trivial.

Wenn endlich aus einer Potenzreihe $F(x)$ die Potenzreihen

$$N(x) = \bar{K}'F(x),$$

$$M(x) = KN(x) = RF(x)$$

gebildet werden, so kann man zunächst, falls $N(x)$ abbricht, nach (7)

$$F(\cdot)\,M(\cdot) = \bar{N}(\cdot)\,N(\cdot)$$

[3]) Dies wird ausdrücklich hervorgehoben, weil wir zwar die dritte Aussage des Satzes in der obigen, die zweite aber in der spiegelbildlichen Fassung zu verwenden haben werden; daß der Satz selbst dagegen nicht anders gefaßt werden durfte, erhellt aus dem Beweise. — Um Anschluß an die in anderen Gebieten üblichen Auffassungen zu gewinnen, — vgl. z. B. E. Schmidt, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, I. Kapitel (Rend. Palermo 1908) —, sei noch darauf hingewiesen, daß man die Definition einer Nullösung $\Phi(x)$ von $\bar{K}'$ unmittelbar in die Form setzen kann: eine Potenzreihe $\Phi(x)$, die zu den sämtlichen Potenzreihen $K\mathfrak{p}_1(x)$, $K\mathfrak{p}_2(x)$, ... orthogonal ist.

folgern[4]). Anderseits ist, falls sogar $F(x)$ abbricht,

$$\overline{F}(\cdot)\,M(\cdot) = \sum_{\mu,\alpha} r_{\mu\alpha}\,\bar{a}_\mu a_\alpha .$$

Daher ist, falls $F(x)$ abbricht,

$$\sum_{\mu,\alpha} r_{\mu\alpha}\,\bar{a}_\mu a_\alpha = \overline{N}(\cdot)\,N(\cdot),$$

also reell und $\geqq 0$ und nur dann $= 0$, wenn

$$0 = N(x) = \overline{K}'\,F(x)$$

ist.

Damit sind alle Behauptungen des Satzes I bewiesen. —

Aus der dritten Behauptung des Satzes I ziehen wir noch eine Folgerung. Ist nämlich eine durch R erzeugbare Potenzreihe $L(x)$ gegeben, so werfen wir die Frage auf, wie weit durch die Forderung

$$L(x) = R\,F(x)$$

die Potenzreihe $F(x)$ schon festgelegt ist. Die Antwort lautet: die Potenzreihe $\overline{K}'\,F(x)$ ist völlig festgelegt. —

An dieser Stelle will ich den Hinweis auf die in § 1 erwähnten Invarianzverhältnisse einschalten. Es mögen an Stelle von $x_1, \ldots, x_n$ durch eine im Hermiteschen Sinne orthogonale Transformation neue Variable $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ eingeführt werden, d. h. so, daß

$$x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n = \mathfrak{x}_1\bar{\mathfrak{x}}_1 + \ldots + \mathfrak{x}_n\bar{\mathfrak{x}}_n$$

wird, also die $\bar{x}$ zu den x kontragredient sind. Kogredient zu den x mögen ferner die Variablen y in Variable $\mathfrak{y}$ transformiert werden. Da nun in bekanntem Sinne (vgl. § 8) die Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$ zu den x kontragredient sind, so sind die $\frac{\partial}{\partial x}$ zu den $\bar{y}$ kogredient. Wird daher bei diesen Transformationen

$$F(x) = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \qquad G(x) = \mathfrak{G}(\mathfrak{x}), \qquad f(x;\bar{y}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{x};\bar{\mathfrak{y}}),$$

so folgt:

$$\overline{F}(\cdot)\,G(\cdot) = \overline{\mathfrak{F}}(\cdot)\,\mathfrak{G}(\cdot)$$

$$f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = \mathfrak{f}\left(\mathfrak{x};\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\right)\mathfrak{G}(\mathfrak{x})$$

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right) F(x) = \bar{\mathfrak{f}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}};\mathfrak{x}\right)\mathfrak{F}(\mathfrak{x}).$$

---

[4]) Macht man hierin die spezielle Annahme $R\,F(x) = 0$, so hat man $M(x) = 0$ und also $0 = N(\cdot)\,N(\cdot)$, d. h. $N(x) = 0$. Dieser neue Beweis für die zweite und dritte Behauptung des Satzes I unterscheidet sich von dem früheren nur durch die Reihenfolge, in der an (7) die beiden Spezialisierungen $M(x) = 0$ und $G(x) = N(x)$ vorgenommen werden.

§ 3.

Der allgemeine Spaltungssatz.

Es seien wieder K und $\bar{K}'$ ein spiegelbildliches Paar linearer Substitutionen, also die Matrix $(k_{\alpha\beta})$ zeilen- und spaltenfinit. *Wir führen jetzt die besondere Voraussetzung ein, daß sich von der Matrix* $(k_{\alpha\beta})$ *eine endliche Matrix*

$$\mathfrak{K} = (k_{\alpha\beta})_{\substack{\alpha=\alpha_1,\ldots,\alpha_\varrho \\ \beta=\beta_1,\ldots,\beta_\sigma}}$$

abspaltet, d. h. daß $k_{\alpha\beta} = 0$ ist, wenn entweder α eine der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho$ und β keine der Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ oder α keine der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho$ und β eine der Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ ist. Für die lineare Substitution K bedeutet diese Voraussetzung, daß erstens, wenn in der Potenzreihe $G(x)$ höchstens die Potenzprodukte $\mathfrak{p}_{\beta_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\beta_\sigma}(x)$ mit von 0 verschiedenen Koeffizienten auftreten, in der Potenzreihe $KG(x)$ höchstens die Potenzprodukte $\mathfrak{p}_{\alpha_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(x)$ mit von 0 verschiedenen Koeffizienten auftreten, und daß zweitens, wenn in der Potenzreihe $G(x)$ die Potenzprodukte $\mathfrak{p}_{\beta_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\beta_\sigma}(x)$ sämtlich den Koeffizienten 0 haben, in der Potenzreihe $KG(x)$ die Potenzprodukte $\mathfrak{p}_{\alpha_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(x)$ sämtlich den Koeffizienten 0 haben; diese zweite Eigenschaft kann man auch dahin aussprechen, daß, wenn in der Potenzreihe $F(x)$ höchstens die Potenzprodukte $\mathfrak{p}_{\alpha_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(x)$ mit von 0 verschiedenen Koeffizienten auftreten, in der Potenzreihe $\bar{K}'F(x)$ höchstens die Potenzprodukte $\mathfrak{p}_{\beta_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\beta_\sigma}(x)$ mit von 0 verschiedenen Koeffizienten auftreten. — Es ist das eine Voraussetzung von solcher Art, daß man, wenn K als Polarenprozeß $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ gegeben ist, ihr Zutreffen gegebenenfalls meist unmittelbar aus dem Bau der Potenzreihe $f(x; y)$ ersieht; man denke z. B. an den einfachen in der Einleitung angeführten Fall.

Um unsere Voraussetzung bequem ausdrücken zu können, wollen wir allgemein die Menge aller derjenigen Potenzreihen, in welchen höchstens gewisse in endlicher Anzahl gegebene Potenzprodukte mit von 0 verschiedenen Koeffizienten auftreten, den zu den gegebenen Potenzprodukten gehörigen *Abschnitt* im Gebiete aller Potenzreihen nennen; wir bezeichnen solche Abschnitte durch eingeklammerte Buchstaben. Die Potenzreihen eines gegebenen Abschnitts sind sämtlich abbrechend und können daher auch Funktionen genannt werden; von Funktionen des Abschnitts linearabhängige Funktionen gehören ebenfalls dem Abschnitt an, und es gibt in dem Abschnitt nur eine endliche Anzahl linearunabhängiger Funktionen.

Ist nun (G) der zu den Potenzprodukten $\mathfrak{p}_{\beta_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\beta_\sigma}(x)$ gehörige und (F) der zu den Potenzprodukten $\mathfrak{p}_{\alpha_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(x)$ gehörige Ab-

schnitt, so wollen wir unsere Voraussetzung[5]) dahin aussprechen, daß (G) und (F) *einander entsprechende Abschnitte* sind, wenn K auf (G) und $\overline{K}'$ auf (F) angewendet wird.

Ist die Potenzreihe $\Psi(x)$ Nullösung von K, so ist auch die Summe derjenigen Glieder von $\Psi(x)$, welche die Potenzprodukte $\mathfrak{p}_{\beta_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\beta_\sigma}(x)$ enthalten, Nullösung von K; Entsprechendes gilt für die durch K erzeugbaren Potenzreihen. Ist eine Funktion $M(x)$ des Abschnitts (F) durch K erzeugbar, so gibt es eine Funktion $G(x)$ des Abschnitts (G), für die $M(x) = KG(x)$ ist.

Es empfiehlt sich, auch den Fall zuzulassen, daß von den Anzahlen ϱ und σ eine $= 0$ ist. Ist z. B. $\sigma = 0$, so ist die Voraussetzung so zu verstehen, daß $k_{\alpha\beta} = 0$ ist, wenn α eine der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho$ ist; unter dem Abschnitt (G) ist dann die nur aus der Funktion 0 bestehende Menge zu verstehen, und jede Funktion des Abschnitts (F) ist Nullösung von $\overline{K}'$. Bei der Beweisführung werden wir die auf diesen trivialen Fall bezüglichen Modifikationen nicht erwähnen. —

Da nun die endlichen Matrices $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}'$ gleichen Rang haben, so ergänzen sich die Anzahl der linearunabhängigen unter denjenigen Funktionen $M(x)$ des Abschnitts (F), welche durch K erzeugbar sind, und die Anzahl der linearunabhängigen unter denjenigen Funktionen $\Phi(x)$ des Abschnitts (F), welche Nullösungen von $\overline{K}'$ sind, zu der Anzahl der linearunabhängigen unter den sämtlichen Funktionen des Abschnitts (F). Anderseits haben nach Satz I die durch K erzeugbaren Potenzreihen und die Nullösungen von $\overline{K}'$ keine von 0 verschiedene Funktion des Abschnitts (F) gemein. Beides zusammengenommen gibt den Satz:

Satz II. *Sind für das spiegelbildliche Paar*

$$K = f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad \overline{K}' = \bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right)$$

von Polarenprozessen (G) und (F) einander entsprechende Abschnitte, wenn K auf (G) und $\overline{K}'$ auf (F) angewendet wird, so läßt sich jede Funktion $F(x)$ des Abschnitts (F) auf eine und nur eine Weise in die Summe

$$F(x) = \Phi(x) + M(x)$$

von zwei solchen Funktionen des Abschnitts (F) spalten, daß $\Phi(x)$ der Gleichung

$$0 = \bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right) \Phi(x)$$

---

[5]) Statt dieser Voraussetzung könnte man auch die allgemeinere zugrundelegen, in welcher der Begriff des Abschnitts ersetzt wird durch den Begriff der Menge aller derjenigen Potenzreihen, welche von gewissen in endlicher Anzahl gegebenen abbrechenden Potenzreihen linearabhängig sind. Vgl. D_{18}.

genügt und $M(x)$ sich durch geeignete Wahl einer Funktion $G(x)$ des Abschnitts (G) in die Gestalt

$$M(x) = f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) G(x)$$

bringen läßt.

Diese Spaltung läßt sich noch etwas anders charakterisieren. Wir bemerken zunächst, daß dafür, daß die Funktion $F(x)$ aus (F) Nullösung von $\bar{K}'$ ist, notwendig und hinreichend ist, daß sie zu jeder zu (F) gehörigen durch K erzeugbaren Funktion orthogonal ist. Notwendig ist die Bedingung nach Satz I. Daß sie auch hinreichend ist, sieht man entweder direkt oder mit Hilfe von Satz II; wird nämlich die Funktion $F(x)$ nach Satz II gespalten, so sind darin $F(x)$ und $\Phi(x)$, also auch $M(x)$ zu jeder zu (F) gehörigen durch K erzeugbaren Funktion orthogonal, mithin $M(x)$ zu sich selbst orthogonal, $M(x) = 0$, $F(x) = \Phi(x)$, also Nullösung von $\bar{K}'$. Auf Grund dieser Bemerkung läßt sich die Spaltung des Satzes II auch durch die Forderung charakterisieren, daß $M(x)$ und $\Phi(x)$ solche Funktionen aus (F) sein sollen, daß $M(x)$ durch K erzeugbar und $\Phi(x)$ zu allen zu (F) gehörigen durch K erzeugbaren Funktionen orthogonal sein soll[6]). Desgleichen ist eine Funktion aus (F) dann und nur dann durch K erzeugbar, wenn sie zu allen zu (F) gehörigen Nullösungen von $\bar{K}'$ orthogonal ist, und auf diese Bemerkung kann ebenfalls eine Charakterisierung der Spaltung des Satzes II gegründet werden.

Da die Summe zweier Funktionen des Abschnitts (F) wieder eine Funktion des Abschnitts (F) ist, so kommt jedes Paar von Funktionen $\Phi(x)$ und $M(x)$ aus (F), von denen $\Phi(x)$ Nullösung von K' und $M(x)$ durch K erzeugbar ist, auch wirklich in einer Spaltung des Satzes II vor.

Wendet man nun Satz II statt auf K auf die lineare Substitution $R = K\bar{K}'$ an, die ihr eigenes Spiegelbild ist, und für die (F) einen sich selbst entsprechenden Abschnitt bildet, so ergibt sich, daß sich jede Funktion $F(x)$ aus (F) auf eine und nur eine Weise in die Summe von zwei solchen Funktionen $\hat{\Phi}(x)$ und $\hat{M}(x)$ aus (F) spalten läßt, daß $\hat{\Phi}(x)$ Nullösung von R und $\hat{M}(x)$ durch R erzeugbar ist. Da aber einerseits jede durch R erzeugbare Potenzreihe offenbar zugleich eine durch K erzeugbare ist, da anderseits nach Satz I die zu (F) gehörigen Nullösungen von R und die zu (F) gehörigen Nullösungen von $\bar{K}'$ übereinstimmen, so ist, wegen der Eindeutigkeit der Spaltung des ursprünglichen Satzes II, $\hat{\Phi}(x) = \Phi(x)$ und $\hat{M}(x) = M(x)$. Es besteht daher der Satz:

[6]) Satz II spielt also hier dieselbe Rolle, wie bei E. Schmidt l. c. der Satz seines § 9. — Natürlich kann man die Spaltung auch dadurch charakterisieren, daß $\Phi(x)$ und $M(x)$ solche Funktionen von (F) sind, daß $M(x)$ durch K erzeugbar und $\overline{\Phi(\cdot)}\,\Phi(\cdot)$ möglichst klein ist.

Satz III. *Sind für das spiegelbildliche Paar* $K = f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $K' = f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right)$ *von Polarenprozessen* (G) *und* (F) *einander entsprechende Abschnitte, wenn* K *auf* (G) *und* K' *auf* (F) *angewendet wird, so sind die durch* $R = KK'$ *erzeugbaren Funktionen von* (F) *mit den durch* K *erzeugbaren Funktionen von* (F) *identisch.* K *und* R *liefern bei Anwendung des Satzes* II *für jede Funktion* $F(x)$ *von* (F) *dieselbe Spaltung.*

Die folgenden Betrachtungen zielen darauf ab, die Spaltung des Satzes II mit Hilfe des Polarenprozesses R durch explizite Formeln zu vollziehen.

Da es von gegebener Reihenzahl ϱ nur endlich viele linearunabhängige Matrices gibt, so existiert eine solche ganze rationale nicht identisch verschwindende Funktion

$$\delta(\lambda) = q_0 + q_1\lambda + \ldots + q_r\lambda^r$$

eines Parameters λ mit konstanten Koeffizienten, daß für jede Funktion $F(x)$ des Abschnitts (F) die Gleichung

$$\delta(R)\,F(x) = 0$$

besteht; darin ist $R = KK'$, und in $\delta(R) = q_0 + q_1R + \ldots + q_rR^r$ bedarf nach unserer Bezeichnung der Polarenprozesse auch das erste Glied keiner Erläuterung, während es in der Sprache der linearen Substitutionen als q_0 mal der identischen linearen Substitution zu bezeichnen wäre. Wir wollen den Grad von $\delta(\lambda)$ möglichst klein wählen; dann ist $\delta(\lambda)$ abgesehen von einem konstanten Faktor völlig bestimmt[7]). Wir unterscheiden nun die Fälle $q_0 = 0$ und $q_0 \neq 0$.

Ist $q_0 = 0$, so erkennt man leicht, daß $q_1 \neq 0$ sein muß. Wendet man nämlich Satz I statt auf K auf R an, so ergibt sich, daß für eine abbrechende Potenzreihe $\hat{F}(x)$ aus der Annahme $R^2\hat{F}(x) = 0$ folgt $R\hat{F}(x) = 0$. Wäre also $q_0 = q_1 = 0$, so würde $\frac{\delta(\lambda)}{\lambda}$ denselben Dienst leisten wie $\delta(\lambda)$, und der Grad von $\delta(\lambda)$ wäre nicht möglichst klein. Wir können also $q_1 = 1$ wählen und

$$\delta(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda),$$
$$\varphi(\lambda) = 1 - \lambda\psi(\lambda)$$

setzen[8]), unter $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ ganze rationale Funktionen verstanden.

[7]) Wir setzen im Text die Eigenschaften von $\delta(\lambda)$ nicht als bekannt voraus, da sich das für uns Nötige unmittelbar aus dem Früheren ergibt. Vgl. auch Fußnote [13]).

[8]) M. a. W. wir setzen die Partialbruchzerlegung $\frac{1}{\delta(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\psi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$ an.

Sind nun $\Phi(x)$ und $M(x)$ Funktionen aus (F), $\Phi(x)$ Nullösung von R, $M(x)$ durch R erzeugbar, so ist

$$R\psi(R)\Phi(x)=0, \qquad \varphi(R)M(x)=0,$$

da $R\Phi(x)=0$ und $M(x)=RF_1(x)$, $\varphi(R)M(x)=\delta(R)F_1(x)=0$ ist. Daraus folgt weiter

$$\varphi(R)\Phi(x)=\Phi(x), \qquad R\psi(R)M(x)=M(x),$$

da wegen $1=\varphi(\lambda)+\lambda\psi(\lambda)$ für jede Potenzreihe $F(x)$

$$F(x)=\varphi(R)F(x)+R\psi(R)F(x)$$

ist.

Liegt nun für eine Funktion $F(x)$ aus (F) die Spaltung

$$F(x)=\Phi(x)+M(x)$$

des Satzes II vor, und berücksichtigt man Satz III, so findet man, indem man auf beide Seiten einmal $\varphi(R)$, einmal $R\psi(R)$ anwendet,

$$\Phi(x)=\varphi(R)F(x), \qquad M(x)=R\psi(R)F(x).$$

In dem anderen Falle $q_0\neq 0$ dagegen kann man $q_0=1$,

$$\delta(\lambda)=1-\lambda\psi(\lambda)$$

setzen. Jede Funktion $F(x)$ aus (F) genügt daher der Gleichung

$$F(x)=R\psi(R)F(x),$$

ist also durch R erzeugbar. In der Spaltung des Satzes II ist daher

$$\Phi(x)=0, \qquad M(x)=F(x).$$

Setzt man in diesem Falle

$$\varphi(\lambda)=0,$$

so gilt also wiederum

$$\Phi(x)=\varphi(R)F(x), \qquad M(x)=R\psi(R)F(x).$$

Es besteht also der Satz:

Satz IV. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* II *gibt es zwei solche ganze rationale Funktionen* $\varphi(\lambda)$ *und* $\psi(\lambda)$ *eines Parameters* λ, *daß für jede Funktion* $F(x)$ *des Abschnitts* (F) *die Spaltung des Satzes* II *durch die Formeln*

$$\Phi(x)=\varphi(R)F(x), \qquad M(x)=R\psi(R)F(x)$$

vollzogen wird, unter R *den Polarenprozeß*

$$R=f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right)$$

verstanden[9]).

[9]) Da die oben bewiesene und verwendete Existenz einer solchen ganzen rationalen nicht durch λ^2 teilbaren Funktion $\delta(\lambda)$, daß für jede Funktion $F(x)$ aus (F)

§ 4.

Modulsysteme.

Wir betrachten nun einen besonders wichtigen Spezialfall des allgemeinen Spaltungssatzes.

Dabei gebrauchen wir das Wort Form im üblichen Sinne. Ist also s eine ganze rationale nichtnegative Zahl, so bilden wir aus den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ die Potenzprodukte von der Exponentensumme s und den zu ihnen gehörigen Abschnitt im Gebiete der Potenzreihen; die Funktionen dieses Abschnitts heißen die Formen vom Grade s. Jede von 0 verschiedene Form hat einen bestimmten, die Form 0 jeden Grad s. Es empfiehlt sich, auch negative Werte der ganzen rationalen Zahl s zuzulassen und dann unter einer Form vom Grade s nur die Funktion 0 zu verstehen.

Es seien nun h Formen

$$f_1(x), \ldots, f_h(x)$$

von den Graden

$$l_1, \ldots, l_h$$

gegeben; wir führen noch vorübergehend h Hilfsvariable $t_1, \ldots, t_h$ ein und betrachten im Gebiete aller Potenzreihen der $n + h$ Variablen

$$x_1, \ldots, x_n; \qquad t_1, \ldots, t_h$$

das spiegelbildliche Paar

$$K = f_1(x)\frac{\partial}{\partial t_1} + \ldots + f_h(x)\frac{\partial}{\partial t_h},$$

$$\bar{K}' = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)t_1 + \ldots + \bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)t_h$$

von Polarenprozessen.

---

die Gleichung $\delta(R)\,F(x) = 0$ besteht, einem besonders bekannten Satze aus der Theorie der Elementarteiler oder aus der der Hauptachsentransformation reellwertiger Hermitescher Formen gleichkommt, so sei noch ausdrücklich betont, daß in dieser Existenz die übrigen auf R bezüglichen Aussagen schon mit enthalten sind. Man gewinnt ja daraus wie oben sofort solche ganze rationale Funktionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$, daß für jede Funktion $F(x)$ aus (F) die beiden Gleichungen

$$F(x) = \varphi(R)\,F(x) + R\,\psi(R)\,F(x),$$
$$0 = R\,\varphi(R)\,F(x)$$

bestehen. Damit ist bereits die Möglichkeit der Spaltung des auf R angewendeten Satzes II ersichtlich gemacht. Ferner kombiniert man aus den beiden Gleichungen die weitere

$$R\,F(x) = R^2\,\psi(R)\,F(x).$$

Diese enthält die Aussage (des auf R angewendeten Satzes I), daß für eine Funktion $F(x)$ aus (F) aus der Annahme $R^2\,F(x) = 0$ folgt $R\,F(x) = 0$. Und hieraus folgt die Eindeutigkeit der Spaltung des auf R angewendeten Satzes II.

Dann erhalten wir folgendermaßen Abschnitte (G) und (F), die einander entsprechen, wenn K auf (G) und $\bar{K}'$ auf (F) angewendet wird. Wir fixieren eine Gradzahl $s \geqq 0$ und verstehen unter (F) die Gesamtheit aller Formen $F(x)$ vom Grade s von den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ allein, unter (G) die Gesamtheit aller Funktionen von der Gestalt

$$G(x;t) = Q_1(x)t_1 + \ldots + Q_h(x)t_h,$$

worin $Q_1(x), \ldots, Q_h(x)$ Formen von den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ allein von den Graden $s - l_1, \ldots, s - l_h$ bedeuten. Wenn nämlich $F(x)$ zu (F) und $G(x;t)$ zu (G) gehört, so wird

$$KG(x;t) = f_1(x)Q_1(x) + \ldots + f_h(x)Q_h(x)$$

eine Funktion von (F) und

$$\bar{K}'F(x) = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x)\cdot t_1 + \ldots + \bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x)\cdot t_h$$

eine Funktion von (G). Auf diese Abschnitte wollen wir nun die Sätze des § 3 anwenden.

Nun sind offenbar die zu (F) gehörigen Nullösungen von $\bar{K}'$ diejenigen Formen $\Phi(x)$ vom Grade s in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ allein, welche dem System von Differentialgleichungen

$$0 = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x), \ldots, 0 = \bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x)$$

genügen, und die zu (F) gehörigen durch K erzeugbaren Funktionen diejenigen Formen $M(x)$ vom Grade s in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ allein, welche der Kongruenz

$$M(x) \equiv 0 \text{ modd. } f_1(x), \ldots, f_h(x)$$

genügen, d. h. durch geeignete Wahl von ganzen rationalen Funktionen $Q_1(x), \ldots, Q_h(x)$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ allein in die Gestalt

$$M(x) = f_1(x)Q_1(x) + \ldots + f_h(x)Q_h(x)$$

gesetzt werden können. Liegt nämlich für eine Form $M(x)$ vom Grade s eine solche Darstellung vor, so gibt es auch eine solche von derselben Gestalt, daß die neuen $Q_1(x), \ldots, Q_h(x)$ Formen von den Graden $s - l_1, \ldots, s - l_h$ sind, und es ist daher $M(x) = KG(x;t)$ mit $G(x;t) = Q_1(x)t_1 + \ldots + Q_h(x)t_h$.

Ferner hat der Polarenprozeß $R = K\bar{K}'$ auf jede Potenzreihe der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ allein dieselbe Wirkung wie der von den Hilfsvariablen freie Polarenprozeß

$$\mathfrak{R} = f_1(x)\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots + f_h(x)\bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Es ist also insbesondere für jede Funktion $F(x)$ von (F)

$$R\,F(x) = \mathfrak{R}\,F(x);$$

dabei ist (F) ein bei $\mathfrak{R}$ sich selbst entsprechender Abschnitt, und es sind die zu (F) gehörigen durch $\mathfrak{R}$ erzeugbaren Funktionen mit den zu (F) gehörigen durch K erzeugbaren (d. h. jener Kongruenz genügenden) Funktionen und die zu (F) gehörigen Nullösungen von $\mathfrak{R}$ mit den zu (F) gehörigen Nullösungen von $\bar{K}'$ (d. h. jenem System von Differentialgleichungen genügenden Funktionen) identisch. Endlich sind, wenn eine zu (F) gehörige durch $\mathfrak{R}$ erzeugbare Funktion $M(x)$ gegeben ist, durch die an die Potenzreihe $\hat{F}(x)$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ allein gestellte Forderung

$$M(x) = \mathfrak{R}\,\hat{F}(x)$$

gemäß der in § 2 an den Satz I geknüpften Folgerung die h Potenzreihen

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{F}(x), \ldots, \bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{F}(x)$$

völlig festgelegt; sie sind Formen von den Graden $s - l_1, \ldots, s - l_h$, da man für $\hat{F}(x)$ auch eine Funktion von (F) wählen kann.

Wir erhalten daher folgende Sätze:

Satz V. *Sind $f_1(x), \ldots, f_h(x)$ gegebene Formen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, so läßt sich jede Form $F(x)$ dieser Variablen auf eine und nur eine Weise in die Summe*

$$F(x) = \Phi(x) + M(x)$$

einer den Differentialgleichungen

$$0 = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x), \ldots, 0 = \bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x)$$

genügenden und einer der Kongruenz

$$M(x) \equiv 0 \mod f_1(x), \ldots, f_h(x)$$

genügenden Form spalten. Dabei gibt es zu jeder Gradzahl s zwei solche ganze rationale Funktionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ eines Parameters λ, daß für jede Form $F(x)$ vom Grade s jene Spaltung durch

$$\Phi(x) = \varphi(\mathfrak{R})\,F(x), \qquad M(x) = \mathfrak{R}\,\psi(\mathfrak{R})\,F(x)$$

vollzogen wird, unter $\mathfrak{R}$ den Polarenprozeß

$$\mathfrak{R} = f_1(x)\,\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots + f_h(x)\,\bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

verstanden.

Satz VI. *Sind $f_1(x), \ldots, f_h(x)$ gegebene Formen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, so läßt sich jede der Kongruenz*

$$M(x) \equiv 0 \mod f_1(x), \ldots, f_h(x)$$

genügende Form $M(x)$ dieser Variablen auf eine und nur eine Weise derart in die Gestalt

$$M(x) = f_1(x)\,N_1(x) + \ldots + f_h(x)\,N_h(x)$$

setzen, daß sich die Formen $N_1(x), \ldots, N_h(x)$ aus einer und derselben Form $\hat{F}(x)$ durch die Formeln

$$N_1(x) = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{F}(x), \ldots, N_h(x) = \bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{F}(x)$$

gewinnen lassen. Dabei sind diese Formen $N_k(x)$ durch

$$N_k(x) = \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(\Re)\,M(x)$$

gegeben ($k = 1, \ldots, h$), worin $\psi(\Re)$ dieselbe Bedeutung wie im Satze V *hat, unter s den Grad von $M(x)$ verstanden.*

Da nämlich die Möglichkeit und Eindeutigkeit dieser Darstellung der Form $M(x)$ nur ein anderer Ausdruck für die obige Diskussion der Aufgabe $M(x) = \Re\,\hat{F}(x)$ ist, so brauchen wir uns nur noch irgendeine Lösung $\hat{F}(x)$ dieser Aufgabe zu verschaffen; dazu wenden wir Satz V an, indem wir $M(x)$ selbst als die zu spaltende Form $F(x)$ wählen, und erhalten $M(x) = \Re\,\psi(\Re)\,M(x)$, womit auch der zweite Teil des Satzes VI bewiesen ist.

§ 5.

Beispiele zu Satz V.

Zur *ersten* Hälfte des Satzes V gibt es die folgenden klassischen Beispiele, von denen wir jedoch die drei ersten zugleich als Beispiele für weitergehende Entwicklungen benutzen und deshalb erst in § 9 ausführlich besprechen werden.

1. $h = 1$, $f_1(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.
2. $2n$ Variable $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n$; $h = 1$, $f_1(x) = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$.
3. 4 Variable $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$; $h = 1$, $f_1(x) = \begin{vmatrix} x_{11}, & x_{12} \\ x_{21}, & x_{22} \end{vmatrix}$.
4. *Clebschsche Normalform der Gleichung eines Linienkomplexes*: 6 Variable $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$; $h = 1$, $f_1(p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}$. Zu jeder Form $F(p)$ gibt es eine und nur eine solche Form $\Phi(p)$, daß

$$F(p) \equiv \Phi(p) \text{ mod. } p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23},$$

$$0 = \frac{\partial^2 \Phi(p)}{\partial p_{12}\,\partial p_{34}} + \frac{\partial^2 \Phi(p)}{\partial p_{13}\,\partial p_{42}} + \frac{\partial^2 \Phi(p)}{\partial p_{14}\,\partial p_{23}}$$

ist.

In den Verallgemeinerungen der beiden letzten Beispiele auf höhere Räume kommt schon der Fall $h > 1$ vor. —

Zur *zweiten* Hälfte des Satzes V heben wir das folgende klassische Beispiel hervor:

$$h = n; \quad f_1(x) = x_1, \ldots, f_n(x) = x_n.$$

Wir betrachten eine Gradzahl $s > 0$; dann gehört jede Form $F(x)$ vom Grade s zu den durch die Kongruenz charakterisierten Formen $M(x)$, so daß in der Spaltung stets $\Phi(x) = 0$, $M(x) = F(x)$ wird. Nun besteht für den Polarenprozeß

$$\Re = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

und für jede Form $F(x)$ vom Grade s die *Eulersche Gleichung*

$$F(x) = \frac{1}{s} \Re F(x).$$

Es wird also

$$\delta(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{s}, \qquad \psi(\lambda) = \frac{1}{s}, \qquad \varphi(\lambda) = 0.$$

Die explizite Formel $M(x) = \Re \psi(\Re) F(x)$ des Satzes V ist also hier nichts anderes als die Eulersche Gleichung selbst.

§ 6.

Formenstaaten.

Wir wollen nunmehr das Wesen der in den Sätzen V und VI enthaltenen expliziten Formeln begrifflich zu fassen versuchen. Dazu dient die Einführung des Begriffes Formenstaat[10]).

Man versteht zunächst unter einem Integritätsbereich eine solche Formenmenge, daß jede aus irgend endlich vielen Formen der Menge ganz rational zusammensetzbare Form ebenfalls der Menge angehört. Hat nun ein Integritätsbereich noch die besondere Eigenschaft, neben den Formen $F(x)$ und $f(x)$ stets auch die Form

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$$

zu enthalten, so nennen wir ihn einen *Formenstaat*. Dann geben unsere expliziten Formeln unmittelbar die beiden Sätze:

Satz VII. *Gehören die Formen $f_1(x), \ldots, f_h(x)$ und $F(x)$ dem Formenstaate $\mathfrak{S}$ an, so gehören die in der Spaltung $F(x) = \Phi(x) + M(x)$ des Satzes* V *auftretenden Formen $\Phi(x)$ und $M(x)$ ebenfalls dem Formenstaate $\mathfrak{S}$ an.*

---

[10]) D_{11} § 6.

Satz VIII. *Gehören die Formen* $f_1(x), \ldots, f_h(x)$ *und die der Kongruenz* $M(x) \equiv 0$ modd. $f_1(x), \ldots, f_h(x)$ *genügende Form* $M(x)$ *dem Formenstaate* $\mathfrak{S}$ *an, so gehören die in der Darstellung* $M(x) = f_1(x) N_1(x) + \ldots + f_h(x) N_h(x)$ *des Satzes* VI *auftretenden Formen* $N_1(x), \ldots, N_h(x)$ *ebenfalls dem Formenstaate* $\mathfrak{S}$ *an.*

Die §§ 7 und 9 bringen Anwendungen dieser Sätze.

§ 7.

Die Endlichkeit der Formenstaaten.

Aus Satz VIII kann nach Hilbertschen Prinzipien ein Endlichkeitssatz gefolgert werden.

Ein Integritätsbereich heißt endlich, wenn aus endlich vielen geeignet ausgewählten sich seine sämtlichen Formen ganz rational zusammensetzen lassen. Nun hat Hilbert ein *hinreichendes Endlichkeitskriterium* angegeben: wenn der Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ die Eigenschaft hat, daß aus jeder zwischen Formen $f_1(x), \ldots, f_h(x)$, $M(x)$ aus $\mathfrak{J}$ bestehenden Kongruenz

$$M(x) \equiv 0 \text{ modd. } f_1(x), \ldots, f_h(x)$$

eine Gleichung

$$M(x) = f_1(x) Q_1(x) + \ldots + f_h(x) Q_h(x)$$

folgt, in der die Formen $Q_1(x), \ldots, Q_h(x)$ ebenfalls aus $\mathfrak{J}$ entnommen sind, so ist $\mathfrak{J}$ endlich. Danach erhellt aus Satz VIII unmittelbar der Satz:

Satz IX. *Jeder Formenstaat ist ein endlicher Integritätsbereich, und zwar ein dem Hilbertschen Endlichkeitskriterium genügender.*

§ 8.

Die Endlichkeit von Invariantensystemen.

Von dem Satze IX kann man eine Anwendung machen auf die Endlichkeit von gewissen Invariantensystemen, und zwar sowohl für den elementaren Invariantenbegriff als auch für den komplizierteren Begriff der Invarianten einer Grundform.

Wir erinnern zunächst an bekannte Überlegungen. Wir betrachten zwei Reihen von Variablen: $x_1, \ldots, x_n$ und $u_1, \ldots, u_n$. Statt der x führen wir durch eine lineare Transformation (d. i. linearhomogene Substitution von nichtverschwindender Determinante) neue Variable $\mathfrak{x}$ ein, statt der u durch eine lineare Transformation neue Variable $\mathfrak{u}$; dabei mögen die beiden Variablenreihen kontragredient sein, d.h. die beiden Transformationen mögen zueinander in der Beziehung stehen, daß die Gleichung

$$x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{u}_1 + \ldots + \mathfrak{x}_n \mathfrak{u}_n$$

vermöge der beiden Transformationen identisch in den x und u erfüllt ist oder, wie man kurz sagt, $x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$ invariant ist. Finden nun vermöge der beiden Transformationen die Gleichungen

$$f(x) = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}), \qquad g(u) = \mathfrak{g}(\mathfrak{u})$$

statt, worin $f, g, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ Formen bedeuten, so folgt nach den Regeln der Differentialrechnung die weitere Gleichung

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = \mathfrak{g}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\right) \mathfrak{f}(\mathfrak{x}).$$

Fallen nun speziell die Formen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ mit den Formen f und g zusammen, d. h. finden die Gleichungen

$$f(x) = f(\mathfrak{x}), \qquad g(u) = g(\mathfrak{u})$$

statt oder sind, wie man kurz sagt, $f(x)$ und $g(u)$ bei unseren Transformationen invariant, so folgt, daß auch die Gleichung

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\right) f(\mathfrak{x})$$

gilt, daß also auch die Form $g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)$ invariant ist. Wir betrachten nun nicht eine einzelne lineare Transformation der x, sondern eine ganze Gruppe **G** von solchen, und transformieren jeweils die u kontragredient zu den x; sind dann $f(x)$ und $g(u)$ bei allen diesen Transformationen invariant oder, wie wir kurz sagen, bei **G** invariant, so folgt, daß auch $g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)$ bei **G** invariant ist.

Dies vorausgeschickt, machen wir nun, um Satz IX anwenden zu können, über die Gruppe **G** eine besondere Voraussetzung. Wenn die x durch eine Transformation von **G** in die $\mathfrak{x}$ übergeführt werden, so betrachten wir zugleich noch diejenige Transformation, durch welche die zu den x konjugiertkomplexen Variablen $\bar{x}$ in die $\bar{\mathfrak{x}}$ übergeführt werden. Wir setzen nun über **G** voraus, daß die Gesamtheit der Transformationen, welche die $\bar{x}$ erfahren, mit der Gesamtheit der Transformationen, welche die u erfahren, übereinstimmt. Damit ist natürlich, da es sich nur um die Gesamtheiten handelt, nicht gesagt, daß für jede einzelne Transformation aus **G** die $\bar{x}$ und die u dieselbe Transformation erfahren oder, wie man kurz sagt, die $\bar{x}$ und die u kogredient sein müßten[11]). Die gemachte Voraussetzung hat nun zur Folge, daß, wenn $f(x)$ und also auch $\bar{f}(\bar{x})$

[11]) Bezeichnet man allgemein mit A die Matrices von **G**, und bedeutet A' die transponierte und $\bar{A}$ die konjugiertkomplexe Matrix, so wird also nicht etwa $A'^{-1} = \bar{A}$ vorausgesetzt, sondern bloß:

Gesamtheit der A'^{-1} = Gesamtheit der $\bar{A}$, m. a. W.:
Gesamtheit der A' = Gesamtheit der $\bar{A}$.

invariant ist, auch die Form $g(u) = \bar{f}(u)$ invariant ist. Sind daher $F(x)$ und $f(x)$ invariant, so ist auch $\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$ invariant, d. h. die bei **G** invarianten Formen der x bilden einen Formenstaat. Wir erhalten also den Satz:

Satz X. *Es seien $u_1, \ldots, u_n$ zu den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ kontragrediente und $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ die zu den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ konjugiert-komplexen Variablen. Ist nun die Gruppe* **G** *von linearen Transformationen der x so beschaffen, daß die Gesamtheit der zugehörigen Transformationen der $\bar{x}$ übereinstimmt mit der Gesamtheit der zugehörigen Transformationen der u, so bilden die bei* **G** *invarianten Formen $F(x)$ einen Formenstaat und daher nach Satz* IX *einen endlichen und zwar einen dem Hilbertschen Endlichkeitskriterium genügenden Integritätsbereich.*

Es sei nun die Grundform vom Grade s mit den normierten Koeffizienten a vorgelegt:

$$a_{\alpha_1}\mathfrak{p}_{\alpha_1}(x) + \ldots + a_{\alpha_\varrho}\mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(x),$$

unter $\mathfrak{p}_{\alpha_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(x)$ die normierten Potenzprodukte vom Grade s verstanden. Man betrachtet die a als unabhängig variable Parameter und setzt fest, daß, wenn für die x durch eine lineare Transformation neue Variable ξ eingeführt werden, immer zugleich für die a neue Variable $\mathfrak{a}$ durch eine solche lineare Transformation eingeführt werden sollen, daß die Grundform invariant bleibt, d. h. daß die Gleichung

$$a_{\alpha_1}\mathfrak{p}_{\alpha_1}(x) + \ldots + a_{\alpha_\varrho}\mathfrak{p}_{\alpha_\varrho} = \mathfrak{a}_{\alpha_1}\mathfrak{p}_{\alpha_1}(\xi) + \ldots + \mathfrak{a}_{\alpha_\varrho}\mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(\xi)$$

vermöge der beiden Transformationen identisch in den x und a erfüllt ist; betrachtet man also noch die lineare Transformation, durch welche die $\mathfrak{p}_{\alpha_1}(x), \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(x)$ in die $\mathfrak{p}_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(\xi)$ übergehen, so werden die a kontragredient zu den $\mathfrak{p}(x)$ transformiert. Durch diese Festsetzung entspricht nun einer für die x vorgeschriebenen Gruppe **G** eine Gruppe Γ für die a, und die bei Γ invarianten Formen $J(a)$ der a sind es, die man als die zu **G** gehörigen Invarianten der Grundform bezeichnet. Wir erinnern nun an diejenige bekannte Überlegung, durch die Sylvester zur Einführung der normierten Potenzprodukte veranlaßt worden ist. Sind nämlich die Variablen u kontragredient zu den x, so folgt aus der Invarianz von $x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$, daß auch

$$\mathfrak{p}_1(x)\mathfrak{p}_1(u) + \mathfrak{p}_2(u)\mathfrak{p}_2(u) + \ldots = e^{x_1u_1 + \ldots + x_nu_n}$$

und

$$\mathfrak{p}_{\alpha_1}(x)\mathfrak{p}_{\alpha_1}(u) + \ldots + \mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(x)\mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(u) = \frac{1}{s!}\cdot(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n)^s$$

invariant sind, und es sind daher $a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_\varrho}$ kogredient zu $\mathfrak{p}_{\alpha_1}(u), \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_\varrho}(u)$.

Dies vorausgeschickt, machen wir nun über die Gruppe **G** wieder jene besondere Voraussetzung. Dann behaupten wir, daß für die Gruppe Γ dieselbe Voraussetzung erfüllt ist. Die zu den a konjugiertkomplexen $\bar{a}$ nämlich sind kogredient zu den $\mathfrak{p}(\bar{u})$, diese erfahren nach der über **G** gemachten Voraussetzung dieselbe Gesamtheit von Transformationen wie die $\mathfrak{p}(x)$, und diese sind kontragredient zu den a; die $\bar{a}$ erfahren also in der Tat dieselbe Gesamtheit von Transformationen wie zu den a kontragrediente Variable. Daher können wir nun Satz X statt auf die Gruppe **G** der x auf die Gruppe Γ der a anwenden und erhalten den Satz:

Satz XI. *Ist eine Gruppe* **G** *von linearen Transformationen der Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ *so beschaffen wie in Satz* X, *so bilden die zu* **G** *gehörigen Invarianten* $J(a)$ *einer Grundform einen Formenstaat im Gebiete der normierten Koeffizienten* a *der Grundform und daher nach Satz* IX *einen endlichen und zwar einen dem Hilbertschen Endlichkeitskriterium genügenden Integritätsbereich.*

Beispiele solcher Gruppen **G** von linearen Transformationen sind: 1. die Gruppe aller Transformationen von der Determinante 1, 2. die Gruppe aller im Hermiteschen Sinne orthogonalen, d. h. $x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n$ invariant lassenden, 3. die Gruppe aller im gewöhnlichen Sinne orthogonalen, d. h. $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ invariant lassenden Transformationen; ferner diejenigen Untergruppen der genannten Gruppen, welche aus denjenigen ihrer Transformationen bestehen, die reelle Koeffizienten haben. *Insbesondere haben wir also einen neuen Beweis*[12]) *für die beiden von Hilbert und von Hurwitz aufgestellten wichtigsten Endlichkeitssätze der Invariantentheorie gewonnen.* Dieser Beweis behält das Hilbertsche Endlichkeitskriterium als Grundlage bei; den Nachweis aber, daß dasselbe für die Invariantenbereiche tatsächlich erfüllt ist, erbringt er nicht durch spezielle rechnerische Hilfsmittel (wie den von Hilbert benützten auf die Transformationskoeffizienten bezüglichen Ω-Prozeß oder den von Hurwitz benützten Integrationsprozeß), sondern schöpft ihn aus allgemeinen Prinzipien.

§ 9.

Fundamentalsystem.

Der anderen am Ende des § 6 angekündigten Anwendung der Sätze VII und VIII über Formenstaaten schicken wir einen Spezialfall voraus, in welchem man noch ohne diese Sätze auskommt.

---

[12]) Vgl. D_{15}.

Ist eine nichtkonstante Form $f(x)$ gegeben, so gibt es nach Satz V (für $h=1$) zu jeder Form $F(x)$ zwei Formen $\Phi_0(x)$ und $F_1(x)$ derart, daß

$$F(x)=\Phi_0(x)+f(x)\,F_1(x), \qquad 0=\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_0(x)$$

ist; ebenso nun zu $F_1(x)$ zwei Formen $\Phi_1(x)$ und $F_2(x)$ derart, daß

$$F_1(x)=\Phi_1(x)+f(x)\,F_2(x), \qquad 0=\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_1(x)$$

ist; usw.; da $f(x)$ als nichtkonstant vorausgesetzt wurde, nehmen dabei die Grade von $F(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$ ab. Man erhält also eine abbrechende Entwicklung:

$$F(x)=\sum_\nu \Phi_\nu(x)[f(x)]^\nu, \quad \text{worin} \quad 0=\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_\nu(x).$$

Es kann nur eine solche Entwicklung geben, da man aus der Annahme einer solchen wieder für die Formen $\Phi_\nu(x)$ Gleichungen von der Gestalt der vorangehenden erhält, und durch diese nach Satz V die Formen $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots$ der Reihe nach völlig festgelegt sind.

Klassische Beispiele dazu sind in § 5 unter 1., 2., 3. angeführt; man hat also eindeutige abbrechende Entwicklungen:

1. $F(x)=\sum_\nu \Phi_\nu(x)\cdot(x_1^2+\ldots+x_n^2)^\nu$ mit $0=\dfrac{\partial^2\Phi_\nu(x)}{\partial x_1^2}+\ldots+\dfrac{\partial^2\Phi_\nu(x)}{\partial x_n^2}$,

2. $F(x;u)=\sum_\nu \Phi_\nu(x;u)\cdot(x_1u_1+\ldots+x_nu_n)^\nu$ mit $0=\dfrac{\partial^2\Phi_\nu(x;u)}{\partial x_1\partial u_1}+\ldots+\dfrac{\partial^2\Phi_\nu(x;u)}{\partial x_n\partial u_n}$,

3. $F(x)=\sum_\nu \Phi_\nu(x)\cdot(x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21})^\nu$ mit $0=\dfrac{\partial^2\Phi_\nu(x)}{\partial x_{11}\partial x_{22}}-\dfrac{\partial^2\Phi_\nu(x)}{\partial x_{12}\partial x_{21}}$,

von denen die letzte unter dem Namen der Clebsch-Gordanschen bekannt ist[13]). —

[13]) Indessen lassen diese Beispiele noch eine andere Interpretation zu. Bildet man nämlich z. B. für die erste von ihnen den Polarenprozeß

$$R=(x_1^2+\ldots+x_n^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right),$$

so genügt jedes Glied $V(x)=\Phi_\nu(x)\cdot(x_1^2+\ldots+x_n^2)^\nu$ der Entwicklung einer Gleichung $RV(x)=cV(x)$, worin c eine Konstante ist. *Man hat es daher mit Beispielen für diejenige Fortbildung des allgemeinen Spaltungssatzes* II *aus* § 3 *zu tun, welche der vollständigen Hauptachsenspaltung der in* § 2 *erwähnten Hermiteschen Form entspricht.* Wenn ich darauf noch etwas näher eingehe, so tue ich es nur, um ersichtlich zu machen, daß die Schlüsse des § 3 nur ein Stück einer aus der Hauptachsentheorie wohlbekannten Deduktion sind.

Wir setzen unter Beibehaltung der Voraussetzungen und Bezeichnungen des § 3

$$\delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_\tau)=(\lambda-\lambda_i)\,\delta_i(\lambda).$$

(Fortsetzung der Fußnote 13 auf nächster Seite.)

Diese Überlegung läßt sich nun auf mehrgliedrige Modulsysteme ausdehnen und außerdem mit Hilfe des Begriffs Formenstaat verfeinern.

Wir erklären zunächst, in welchem Sinne wir die Benennung Formenschar gebrauchen. Es ist üblich, eine Menge, welche aus lauter Formen besteht, dann eine Formenschar zu nennen, wenn jede von irgend endlich vielen Formen der Menge linearabhängige Funktion selbst der Menge angehört; darin liegt dann schon, daß alle Formen der Menge gleichen Grad haben. Dagegen wollen wir hier[14]) eine Menge, welche aus lauter Formen besteht, dann eine *Formenschar* nennen, wenn jede von irgend endlich vielen Formen der Menge linearabhängige Form selbst der Menge angehört; bei dieser Fassung der Definition brauchen die Formen der Menge nicht alle denselben Grad zu haben, und eine Formenschar ist nichts anderes als die Vereinigungsmenge von lauter Formenscharen alter Definition von verschiedenen Graden.

Wir führen nun den Begriff des Fundamentalsystems durch folgende Definition ein, wobei wir jetzt durch eingeklammerte Buchstaben Formenmengen (also nicht die in § 3 eingeführten „Abschnitte") bezeichnen wollen.

Die einem bestimmten λ_i und allen Funktionen $\hat{F}(x)$ aus (F) entsprechenden Funktionen $V_i(x) = \delta_i(R)\,\hat{F}(x)$ genügen der Gleichung $RV_i(x) = \lambda_i V_i(x)$ und können nicht alle identisch verschwinden. Für $W_i(x) = \bar{K}' V_i(x)$ wird also $\lambda_i V_i(x) = KW_i(x)$, und gemäß § 2 Formel (7) folgt $\lambda_i \overline{V}_i(\cdot)\, V_i(\cdot) = \overline{W}_i(\cdot)\, W_i(\cdot)$, mithin ist λ_i reell (und $\geqq 0$). Daher ist der Polarenprozeß $R - \lambda_i$ sein eigenes Spiegelbild, und man erkennt, indem man auf ihn das in § 3 bereits Bewiesene anwendet, daß λ_i bloß einfache Nullstelle von $\delta(\lambda)$ ist. Nunmehr folgt aus der mit der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\delta(\lambda)}$ gleichbedeutenden Gleichung

$$1 = \frac{\delta_1(\lambda)}{\delta_1(\lambda_1)} + \ldots + \frac{\delta_\tau(\lambda)}{\delta_\tau(\lambda_\tau)}$$

leicht, daß sich jede Funktion $F(x)$ aus (F) auf eine und nur eine Weise so in

$$F(x) = V_1(x) + \ldots + V_\tau(x)$$

spalten läßt, daß $V_i(x)$ den Gleichungen

$$RV_i(x) = \lambda_i V_i(x)$$

genügende Funktionen aus (F) sind, und ferner, daß dabei $V_i(x)$ durch die explizite Formel

$$V_i(x) = \frac{\delta_i(R)}{\delta_i(\lambda_i)} F(x)$$

gegeben ist. Daraus ist endlich hinterher klar, daß die λ_i die einzigen Werte λ sind, für die $RF(x) = \lambda F(x)$ durch nicht identisch verschwindende Funktionen aus (F) erfüllbar ist. — Zu der gleichzeitigen Betrachtung der Spiegelbilder K und $\bar{K}'$ vgl. noch das III. Kapitel der Doktordissertation von E. Schmidt.

[14]) In Übereinstimmung mit D_{11}, aber nicht mit D_{18}.

Sind (F) und (f) zwei Integritätsbereiche von Formen, und zwar (f) Teilmenge von (F)

$$(f) \leqq (F),$$

so verstehen wir unter einem *Fundamentalsystem* für (F) gegenüber (f) eine Formenschar (Φ), und zwar Teilmenge von (F)

$$(\Phi) \leqq (F),$$

welche den folgenden Bedingungen genügt:

I. (Φ) reicht aus, um jede Form $F(x)$ aus (F) in die Gestalt

$$F(x) = \hat{f}_1(x)\,\Phi_1(x) + \ldots + \hat{f}_\nu(x)\,\Phi_\nu(x)$$

mit Formen $\hat{f}_1(x), \ldots, \hat{f}_\nu(x)$ aus (f) und Formen $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_\nu(x)$ aus (Φ) zu bringen.

II. Keine Formenschar (Φ^*), die echte Teilmenge von (Φ) wäre, reicht aus, um jede Form $F(x)$ aus (F) derart in die angegebene Gestalt zu bringen, daß $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_\nu(x)$ zu (Φ^*) gehörten.

Diesen Begriff des Fundamentalsystems wenden wir nun auf den besonderen Fall an, daß die gegebenen Integritätsbereiche (f) und (F) beide endlich sind und (F) sogar dem Hilbertschen Endlichkeitskriterium (§ 7) genügt. Es seien dabei, vorausgesetzt, daß (f) nicht bloß aus Konstanten besteht, $f_1(x), \ldots, f_h(x)$ solche nichtkonstante Formen aus (f), daß sich aus ihnen alle Formen von (f) ganzrational zusammensetzen lassen. Dann erkennt man leicht[15]), daß eine Formenschar (Φ), welche Teilmenge von (F) ist, dann und nur dann ein Fundamentalsystem für (F) gegenüber (f) bildet, wenn sich jede Form $F(x)$ aus (F) auf eine und nur eine Weise in die Summe

$$F(x) = \Phi(x) + M(x)$$

einer Form $\Phi(x)$ aus (Φ) und einer der Kongruenz

$$M(x) \equiv 0 \mod f_1(x), \ldots, f_h(x)$$

genügenden Form $M(x)$ spalten läßt.

Insbesondere folgt daher aus den Sätzen über Formenstaaten (VII, VIII, IX):

Satz XII. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Formenstaat, und sind $f_1(x), \ldots, f_h(x)$ nichtkonstante Formen aus $\mathfrak{S}$, so bilden diejenigen Formen $\Phi(x)$ aus $\mathfrak{S}$, welche dem System von Differentialgleichungen*

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) = 0, \ldots, \bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) = 0 \tag{8}$$

[15]) Wie in dem obigen Spezialfalle; näher ausgeführt in D_{11} § 4.

genügen, ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{S}$ gegenüber der Menge aller aus $f_1(x), \ldots, f_h(x)$ ganzrational zusammensetzbaren Formen.

Als Beispiel nehmen wir einen Fall, für welchen Kronecker ein Fundamentalsystem konstruiert hat, Satz XII aber ein anderes und in gewisser Hinsicht vorzuziehendes liefert. Die Menge $\mathfrak{S}$ aller bei einer gegebenen Gruppe $\mathbf{G}$ von *Permutationen* der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ invarianten Formen ist nach Satz X ein Formenstaat. Die Menge aller symmetrischen Formen ist eine Teilmenge von $\mathfrak{S}$ und ein endlicher Integritätsbereich (f); wir können als $f_1(x), \ldots, f_h(x)$ die symmetrischen Grundfunktionen wählen $(h = n)$. Sucht man nun zunächst alle Formen überhaupt, welche dem System (8) von Differentialgleichungen genügen, so ergeben sich[16]) hier, wenn $P(x)$ das Differenzenprodukt

$$P(x) = \prod_{i>k}(x_i - x_k)$$

bedeutet, ausschließlich die Formen

$$\sum_{\nu} c_\nu \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) P(x), \tag{9}$$

worin die $\mathfrak{P}_\nu(x)$ die sämtlichen Potenzprodukte eines bestimmten Grades s und die c_ν beliebige Konstanten bedeuten; dabei genügt es offenbar, für s die Werte $1, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$ zuzulassen. Nach Satz XII hat man also:

Satz XIII. *Ist $\mathbf{G}$ eine Gruppe von Permutationen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, so bildet die Menge aller derjenigen unter den Formen (9), welche bei $\mathbf{G}$ invariant sind, ein Fundamentalsystem für die Menge aller bei $\mathbf{G}$ invarianten Formen gegenüber der Menge aller symmetrischen Formen.*

Auch hierin ist ein klassischer Satz als Spezialfall enthalten. Nimmt man nämlich für $\mathbf{G}$ die Permutationsgruppe von der Ordnung $\frac{1}{2}n!$, so sind von den Formen (9) bloß die Formen c und $cP(x)$ invariant, unter c eine beliebige Konstante verstanden, und Satz XIII besagt also hier, daß sich jede bei $\mathbf{G}$ invariante Form in die Summe einer symmetrischen Form und des Produkts aus $P(x)$ und einer symmetrischen Form zerlegen läßt.

§ 10.

Formale Vorbemerkung zu § 11.

Wir betrachten in $n + \nu$ Variablen

$$x_1, \ldots, x_n, \quad \xi_1, \ldots, \xi_\nu$$

eine lineare Substitution $\mathfrak{R}$ von der besonderen Art, daß erstens für jede

[16]) D_{11} § 5.

Potenzreihe $F(x, \xi)$ dieser Variablen die Potenzreihe $\mathfrak{R} F(x, \xi)$ von $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig ist und zweitens für jede Potenzreihe $F(x, \xi)$ die Bedingung $\mathfrak{R} F(x, \xi) = \mathfrak{R} F(x, 0)$ erfüllt ist. Die erste Voraussetzung besagt, daß in der zugehörigen Matrix gewisse Horizontalreihen aus lauter Nullen bestehen, die zweite, daß gewisse Vertikalreihen aus lauter Nullen bestehen. *Unter diesen Umständen ist es bequemer, diese aus Nullen bestehenden Reihen von vorneherein zu unterdrücken und die Ausdrucksweise folgendermaßen zu modifizieren.*

Es seien $\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x), \ldots$ die normierten Potenzprodukte der $x_1, \ldots, x_n$ und $\pi_1(\xi), \pi_2(\xi), \ldots$ die normierten Potenzprodukte der $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$. Vermöge einer zeilenfiniten Matrix $(\mathfrak{k}_{\nu\alpha})$ werde jeder Potenzreihe $F(x) = a_1 \mathfrak{p}_1(x) + a_2 \mathfrak{p}_2(x) + \ldots$ der x allein eine Potenzreihe $H(\xi) = h_1 \pi_1(\xi) + h_2 \pi_2(\xi) + \ldots$ der ξ allein zugeordnet durch die Festsetzung

$$\begin{aligned} h_1 &= \mathfrak{k}_{11} a_1 + \mathfrak{k}_{12} a_2 + \ldots \\ h_2 &= \mathfrak{k}_{21} a_1 + \mathfrak{k}_{22} a_2 + \ldots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Diese Zuordnung werde mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet und

$$H(\xi) = \mathfrak{R} F(x)$$

gesetzt. Jede so herstellbare Zuordnung heißt eine lineare Substitution. Unter ihrem Kern wird die Potenzreihe in $\xi_1, \ldots, \xi_\nu, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$

$$\mathfrak{R}(\xi; \bar{y}) = \sum_{\nu, \alpha} \mathfrak{k}_{\nu\alpha} \pi_\nu(\xi) \mathfrak{p}_\alpha(\bar{y})$$

verstanden, und man hat

$$\mathfrak{R}(\xi; \bar{y}) = \mathfrak{R}\, e^{x_1 \bar{y}_1 + \ldots + x_n \bar{y}_n} \tag{10}$$

und

$$\mathfrak{R} F(x) = \mathfrak{R}(\xi; \cdot) F(\cdot).$$

Ist die Matrix $\begin{matrix} \mathfrak{k}_{11}, \mathfrak{k}_{12}, \ldots \\ \mathfrak{k}_{21}, \mathfrak{k}_{22}, \ldots \\ \cdots\cdots \end{matrix}$ auch spaltenfinit, so kann man zugleich mittels der Matrix $\begin{matrix} \bar{\mathfrak{k}}_{11}, \bar{\mathfrak{k}}_{21}, \ldots \\ \bar{\mathfrak{k}}_{12}, \bar{\mathfrak{k}}_{22}, \ldots \\ \cdots\cdots \end{matrix}$ jeder Potenzreihe $G(\xi)$ der ξ allein eine Potenzreihe $L(x)$ der x allein zuordnen. Diese Zuordnung heißt die lineare Substitution $\bar{\mathfrak{R}}'$ und das Spiegelbild von $\mathfrak{R}$; man setzt $L(x) = \bar{\mathfrak{R}}' G(\xi)$ und hat

$$\bar{\mathfrak{R}}' G(\xi) = \bar{\mathfrak{R}}(\cdot\,\cdot\,; x) G(\cdot\,\cdot).$$

Dabei haben wir die auf n Variablen bezügliche und die auf ν Variablen bezügliche Faltung durch $\cdot$ und $\cdot\,\cdot$ unterschieden.

§ 11.

Algebraische Gebilde mit ganzrationaler Parameterdarstellung.

Es seien n Formen vom Grade $\sigma > 0$

$$\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)$$

der ν Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ gegeben. *Dann ist* für Potenzreihen $F(x)$ der n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ *durch*

$$\mathfrak{R}\, F(x) = F(\varphi(\xi)),$$

d. h. $\mathfrak{R}\, F(x_1, \ldots, x_n) = F(\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi))$, *eine lineare Substitution* $\mathfrak{R}$ (im Sinne des § 10) *definiert, und* $\mathfrak{R}$ *besitzt ein Spiegelbild* $\mathfrak{R}'$. Der Kern $\mathfrak{R}(\xi; \bar{y})$ von $\mathfrak{R}$ ist nach (10) durch

$$\mathfrak{R}(\xi; \bar{y}) = e^{\varphi_1(\xi)\bar{y}_1 + \ldots + \varphi_n(\xi)\bar{y}_n}$$

gegeben, und es wird daher

$$\overline{\mathfrak{R}}' G(\xi) = \mathfrak{p}_1(x)\,\mathfrak{p}_1(\bar{\varphi}(\cdot\,\cdot))\,G(\cdot\,\cdot) + \mathfrak{p}_2(x)\,\mathfrak{p}_2(\bar{\varphi}(\cdot\,\cdot))\,G(\cdot\,\cdot) + \ldots .$$

Es sind ferner die Menge (F) aller Formen vom Grade s der x und die Menge (G) aller Formen vom Grade $s \cdot \sigma$ der ξ in dem Sinne *einander entsprechende Abschnitte*, daß $\mathfrak{R}$ jede Funktion von (F) in eine Funktion von (G) und $\overline{\mathfrak{R}}'$ jede Funktion von (G) in eine Funktion von (F) verwandelt. Daher ergeben der allgemeine Spaltungssatz des § 3 und seine Folgerungen sofort die folgenden Tatsachen:

Jede Funktion $F(x)$ des Abschnitts (F) läßt sich auf eine und nur eine Weise so in die Summe

$$F(x) = M(x) + \Phi(x)$$

zweier Funktionen des Abschnitts (F) spalten, daß[17]) $M(x)$ Nullösung von $\mathfrak{R}$ und $\Phi(x)$ durch $\overline{\mathfrak{R}}'$ erzeugbar ist, d. h. daß $M(x)$ der Bedingung

$$0 = M(\varphi(\xi))$$

genügt und $\Phi(x)$ durch geeignete Wahl einer Funktion $G(\xi)$ aus (G) in die Gestalt

$$(11) \quad \Phi(x) = \mathfrak{p}_1(x)\,\mathfrak{p}_1(\bar{\varphi}(\cdot\,\cdot))\,G(\cdot\,\cdot) + \mathfrak{p}_2(x)\,\mathfrak{p}_2(\bar{\varphi}(\cdot\,\cdot))\,G(\cdot\,\cdot) + \ldots$$

gebracht werden kann. Damit ferner eine Funktion $\Phi(x)$ von (F) sich in die Gestalt (11) bringen läßt, ist notwendig und hinreichend, daß sie zu allen der Bedingung $0 = M(\varphi(\xi))$ genügenden Funktionen $M(x)$ von (F) ortho-

---

[17]) Die von § 3 abweichende Verteilung der Buchstaben rechtfertigt sich weiter unten.

gonal ist[18]). Da endlich nach Satz III jede durch $\overline{\mathfrak{R}}'$ erzeugbare Funktion aus (F) auch durch $\overline{\mathfrak{R}}'\mathfrak{R}$ erzeugbar ist, so läßt sich die Darstellung (11) auch ersetzen durch

$$(12)\quad \Phi(x) = \mathfrak{p}_1(x)\,\mathfrak{p}_1(\overline{\varphi}(\cdot\,\cdot))\,\hat{F}(\varphi(\cdot\,\cdot)) + \mathfrak{p}_2(x)\,\mathfrak{p}_2(\overline{\varphi}(\cdot\,\cdot))\,\hat{F}(\varphi(\cdot\,\cdot)) + \ldots$$

worin $\hat{F}(x)$ eine geeignet gewählte Funktion aus (F) bedeutet.

Diese aus dem allgemeinen Spaltungssatze des § 3 entnommenen Ergebnisse bringen wir nun in Verbindung mit dem Ergebnis einer zweiten, auf den Sätzen des § 4 über Modulsysteme beruhenden, Behandlungsweise der Bedingung $M(\varphi(\xi)) = 0$.

Aus der Menge aller derjenigen Formen $M(x)$ aller Grade, welche der Bedingung

$$0 = M(\varphi(\xi))$$

genügen[19]), kann man nach einem allgemeinen Satze von Hilbert endlich viele

$$f_1(x), \ldots, f_h(x)$$

so herausgreifen, daß für jede Form der Menge die Kongruenz

$$M(x) \equiv 0 \mod f_1(x), \ldots, f_h(x)$$

besteht. Die Menge besteht dann aus allen dieser Kongruenz genügenden Formen $M(x)$. Nach Satz V ergibt sich also, daß sich jede Funktion $F(x)$ des Abschnitts (F) auf eine und nur eine Weise so in die Summe

$$F(x) = \Phi(x) + M(x)$$

---

[18]) Damit also die Funktion

$$\Phi(x) = v_1\,\mathfrak{p}_1(x) + v_2\,\mathfrak{p}_2(x) + \ldots$$

aus (F) der Darstellung (11) fähig ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes System $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots$ von Konstanten, für welches die Gleichung

$$0 = \overline{m}_1\,\mathfrak{p}_1(\overline{\varphi}(\bar{\xi})) + \overline{m}_2\,\mathfrak{p}_2(\overline{\varphi}(\bar{\xi})) + \ldots$$

identisch in den Variablen $\bar{\xi}$ besteht, auch die Gleichung

$$0 = \overline{m}_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots$$

besteht; darin sind die Summen nur über die Potenzprodukte des Abschnitts (F) zu erstrecken. In der Sprache von Clebsch heißt das: die Funktionen $\Phi(x)$ sind durch die *symbolische Darstellung*

$$\mathfrak{p}_1(\overline{\varphi}(\tau))\,\mathfrak{p}_1(x) + \mathfrak{p}_2(\overline{\varphi}(\tau))\,\mathfrak{p}_2(x) + \ldots$$

(Summe der zu (F) gehörigen Glieder von $e^{\overline{\varphi}_1(\tau)x_1 + \ldots + \overline{\varphi}_n(\tau)x_n}$) mit den Symbolen τ charakterisiert.

[19]) Daß das durch Nullsetzen aller dieser $M(x)$ definierte algebraische Gebilde im Gebiete der Variablen x die Parameterdarstellung $x_1 = \varphi_1(\xi), \ldots, x_n = \varphi_n(\xi)$ mit den Parametern ξ „zuläßt", besagt natürlich keineswegs, daß es durch dieselbe erschöpft wird.

zweier Funktionen aus (F) spalten läßt, daß $M(x)$ der in den ξ identischen Gleichung

$$0 = M(\varphi(\xi))$$

und $\Phi(x)$ dem System von Differentialgleichungen

$$0 = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x), \ \ldots, \ 0 = \bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) \tag{13}$$

genügt. Damit ferner eine Funktion $\Phi(x)$ aus (F) diesem System von Differentialgleichungen genügt, ist notwendig und hinreichend, daß sie zu allen der Gleichung $0 = M(\varphi(\xi))$ genügenden Funktionen $M(x)$ von (F) orthogonal ist; *folglich sind unter den Funktionen des Abschnitts* (F) *die dem System* (13) *von Differentialgleichungen genügenden identisch mit den der Darstellung* (11) *fähigen, also auch identisch mit den der Darstellung* (12) *fähigen.* Die jetzige Spaltung der Funktion $F(x)$ ist daher mit der früheren identisch.

§ 12.

Beispiele zu § 11.

Wir wollen die Entwicklungen des § 11 an zwei klassischen Beispielen erläutern, die bereits in den §§ 5 und 9 behandelt wurden: an der Clebschschen Normalform der Gleichung eines Linienkomplexes und an der Clebsch-Gordanschen Reihenentwicklung; dabei werden wir bei dem letzteren Beispiel der größeren Deutlichkeit wegen nicht eine zweireihige, sondern eine dreireihige Determinante zugrunde legen.

I. Aus den 8 Variablen

$$\begin{matrix} \xi_1', & \xi_2', & \xi_3', & \xi_4' \\ \xi_1'', & \xi_2'', & \xi_3'', & \xi_4'' \end{matrix}$$

bilden wir die 6 Funktionen

$$\varphi_{12}(\xi), \ \varphi_{13}(\xi), \ \varphi_{14}(\xi), \ \varphi_{34}(\xi), \ \varphi_{42}(\xi), \ \varphi_{23}(\xi),$$

worin

$$\varphi_{ik}(\xi) = \xi_i' \xi_k'' - \xi_k' \xi_i''$$

gesetzt ist. Wir führen ferner 6 Variable

$$p_{12}, \ p_{13}, \ p_{14}, \ p_{34}, \ p_{42}, \ p_{23}$$

ein und betrachten die lineare Substitution

$$\mathfrak{R}\, F(p) = F(\varphi(\xi))$$

und ihr Spiegelbild $\overline{\mathfrak{R}}'$.

Wir fixieren eine Gradzahl s und verstehen unter (F) die Menge aller Formen $F(p)$ vom Grade s und unter (G) die Menge aller Formen $G(\xi)$

vom Grade $2s$. Dann sind (F) und (G) einander entsprechende Abschnitte, wenn $\mathfrak{R}$ auf (F) und $\mathfrak{R}'$ auf (G) angewendet wird.

Der Kern von $\mathfrak{R}$ ist

$$\mathfrak{R}(\xi;\overline{p}) = e^{\varphi_{12}(\xi)\overline{p}_{12}+\ldots+\varphi_{23}(\xi)\overline{p}_{23}}$$

und die Summe der den Abschnitten (F) und (G) entsprechenden Glieder daraus

$$\frac{1}{s!}\left(\varphi_{12}(\xi)\overline{p}_{12}+\ldots+\varphi_{23}(\xi)\overline{p}_{23}\right)^s.$$

Daher wird zunächst für jede Form $F(p)$ aus (F):

$$\mathfrak{R}F(p) = \frac{1}{s!}\left((\xi_1'\xi_2''-\xi_2'\xi_1'')\frac{\partial}{\partial p_{12}}+\ldots+(\xi_2'\xi_3''-\xi_3'\xi_2'')\frac{\partial}{\partial p_{23}}\right)^s F(p),$$

was auch aus der Definition $\mathfrak{R}F(p) = F(\varphi(\xi))$ unmittelbar ersichtlich ist. *Ferner aber wird für jede Form $G(\xi)$ aus (G):*

$$(14)\quad \overline{\mathfrak{R}}'G(\xi) = \frac{1}{s!}\left(p_{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1'\partial\xi_2''}-\frac{\partial^2}{\partial\xi_2'\partial\xi_1''}\right)+\ldots+p_{23}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2'\partial\xi_3''}-\frac{\partial^2}{\partial\xi_3'\partial\xi_2''}\right)\right)^s G(\xi)$$

Jede Form $F(p)$ vom Grade s läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Summe

$$(15)\qquad F(p) = M(p)+\Phi(p)$$

zweier Formen spalten, von denen $M(p) = M(p_{12},\ldots,p_{23})$ der Bedingung

$$0 = M(\xi_1'\xi_2''-\xi_2'\xi_1'',\ldots,\xi_2'\xi_3''-\xi_3'\xi_2'')$$

genügt, während $\Phi(p)$ sich durch geeignete Wahl einer Form $G(\xi)$ vom Grade $2s$ in die Gestalt

$$(16)\qquad \Phi(p) = \overline{\mathfrak{R}}'G(\xi)$$

setzen läßt, worin $\overline{\mathfrak{R}}'G(\xi)$ nun durch (14) erklärt werden kann. Jede Form $\Phi(p)$ vom Grade s, die sich in diese Gestalt setzen läßt, kann auch durch geeignete Wahl einer Form $\hat{F}(p)$ vom Grade s in die Gestalt

$$\Phi(p) = \overline{\mathfrak{R}}'\hat{F}(\xi_1'\xi_2''-\xi_2'\xi_1'',\ldots,\xi_2'\xi_3''-\xi_3'\xi_2'')$$

gesetzt werden.

Es besteht nun aber darüber hinaus in diesem Beispiele eine Tatsache, die in den allgemeinen Entwicklungen nicht vorgesehen war: in der Spaltung (15) *der Form $F(p)$ ist $\Phi(p)$ durch die einfache Formel gegeben*[20]*:*

$$(17)\qquad \Phi(p) = \frac{1}{(s+1)!}\overline{\mathfrak{R}}'F(\xi_1'\xi_2''-\xi_2'\xi_1'',\ldots,\xi_2'\xi_3''-\xi_3'\xi_2''),$$

[20]) Mertens, Über ganze Funktionen von m Systemen von je n Unbestimmten, Monatsh. f. Math. u. Phys. 4.

d. h. man kann in der vorangehenden Formel $\hat{F}(p) = \frac{1}{(s+1)!} F(p)$ wählen, worin $F(p)$ die zu spaltende Form selbst ist. Um (17) zu verifizieren, bemerke man zunächst, daß es genügt zu zeigen, daß aus (17) durch Einsetzung von $p_{12} = \varphi_{12}(\zeta), \ldots, p_{23} = \varphi_{23}(\zeta)$, unter den ζ neue Variable verstanden, eine richtige Gleichung entsteht; denn die Differenz beider Seiten von (17) ist eine durch $\overline{\mathfrak{R}}'$ erzeugbare Form $\Phi_1(p)$, und für eine solche kann aus $\mathfrak{R}\,\Phi_1(p) = 0$ auf $\Phi_1(p) = 0$ geschlossen werden. Bei jener Einsetzung vereinfacht sich aber die auf der rechten Seite von (17) zu vollziehende Operation, da man $\varphi_{12}(\zeta)\,\overline{\varphi}_{12}(\bar{\xi}) + \ldots + \varphi_{23}(\zeta)\,\overline{\varphi}_{23}(\bar{\xi})$ nach dem Determinantenmultiplikationstheorem für rechteckige Matrices in eine zweireihige Determinante zusammenziehen kann; es handelt sich also um die s-malige Ausführung einer sehr einfachen Operation. Nun kann man aber an der Funktion, an welcher die Operation auszuführen ist, die ganz entsprechende Vereinfachung ausführen; es ist nämlich zunächst $F(\varphi(\xi)) = \Phi(\varphi(\xi))$ und nach (16) weiter[21]) $\Phi(\varphi(\xi)) = \frac{1}{s!}\left(\varphi_{12}(\xi)\,\overline{\varphi}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) + \ldots + \varphi_{23}(\xi)\,\overline{\varphi}_{23}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right)^s G(\eta)$, unter den η neue Variable verstanden. Hiernach ist die Rechnung leicht auszuführen. — Insbesondere genügt also jede der Darstellung (16) fähige Form $\Phi(p)$ vom Grade s der Gleichung $\overline{\mathfrak{R}}'\,\mathfrak{R}\,\Phi(p) = (s+1)!\,\Phi(p)$.

Indem wir nun wieder der allgemeinen Entwicklung folgen, haben wir diejenigen Formen $M(p)$ vom Grade s zu suchen, die der Bedingung

$$0 = M(\xi_1'\xi_2'' - \xi_2'\xi_1'', \ldots, \xi_2'\xi_3'' - \xi_3'\xi_2'')$$

genügen. Das sind aber bekanntlich diejenigen, welcher der Kongruenz

$$M(p) \equiv 0 \mod f(p)$$

genügen, worin

$$f(p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}$$

ist. Einerseits nämlich ist $f(\varphi(\xi)) = 0$. Ist andererseits $M(p)$ eine Form vom Grade s, die der Bedingung $M(\varphi(\xi)) = 0$ genügt, so setze man, durch Division von $M(p)$ durch $f(p)$ bezüglich der Variablen p_{12}, $p_{34}^s\,M(p) \equiv M_{12}(p) \mod f(p)$, worin $M_{12}(p)$ eine von p_{12} freie Form vom Grade s ist. Nun ist auch $M_{12}(\varphi(\xi)) = 0$, und um hieraus $M_{12}(p) = 0$ zu schließen, braucht man nur festzustellen, daß die nach Weglassung von $\varphi_{12}(\xi)$ verbleibenden fünf Funktionen $\varphi_{ik}(\xi)$ algebraisch unabhängig sind[22]). Schreibt man aber diesen fünf Funktionen beliebige Werte p_{ik} vor, von denen $p_{34} \neq 0$ ist, so kann man zunächst ξ_3', ξ_4', ξ_3'', ξ_4'' auf

---

[21]) M. a. W.: man benutzt die symbolische Darstellung aus Fußnote [18]).

[22]) Man braucht also nicht zu wissen, daß das durch $f(p) = 0$ definierte algebraische Gebilde durch die Parameterdarstellung $p_{12} = \varphi_{12}(\xi), \ldots, p_{23} = \varphi_{23}(\xi)$ erschöpft wird.

mannigfache Weise der Bedingung $\varphi_{34}(\xi) = p_{34}$ entsprechend wählen und hat dann in den vier übrigen Bedingungen zwei lineare Gleichungen für ξ_1' und ξ_1'' mit der Determinante $p_{34} \neq 0$ und zwei ebensolche für ξ_2' und ξ_2''. Die fünf Funktionen sind also algebraisch unabhängig, mithin $p_{34}^s M(p) \equiv 0 \bmod. f(p)$, also auch $M(p) \equiv 0 \bmod. f(p)$.

Nach den allgemeinen Entwicklungen sind also diejenigen Formen $\Phi(p)$, welche der Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial^2 \Phi(p)}{\partial p_{12} \partial p_{34}} + \frac{\partial^2 \Phi(p)}{\partial p_{13} \partial p_{42}} + \frac{\partial^2 \Phi(p)}{\partial p_{14} \partial p_{23}}$$

genügen, identisch mit den der Darstellung (16) fähigen. Jede Form $F(p)$ vom Grade s läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Summe

$$F(p) = \Phi(p) + M(p)$$

zweier Formen spalten, von denen $\Phi(p)$ der vorstehenden Differentialgleichung und $M(p)$ der Bedingung

$$0 = M(\xi_1' \xi_2'' - \xi_2' \xi_1'', \ldots, \xi_2' \xi_3'' - \xi_3' \xi_2'')$$

genügt, *und in dieser Spaltung ist nach* (17) *die Form* $\Phi(p)$ *durch die explizite Formel*[23])

$$\Phi(p) = \frac{1}{(s+1)!\, s!} \left(p_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1' \partial \xi_2''} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2' \partial \xi_1''} \right) + \cdots \right.$$
$$\left. + p_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2' \partial \xi_3''} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_3' \partial \xi_2''} \right) \right)^s F(\xi_1' \xi_2'' - \xi_2' \xi_1'', \ldots, \xi_2' \xi_3'' - \xi_3' \xi_2'')$$

gegeben.

II. Aus den acht Variablen

$$\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31}; \xi_1,$$
$$\xi_{12}, \xi_{22}, \xi_{32}; \xi_2$$

bilden wir die neun Funktionen

$$\varphi_{11}(\xi) = \xi_{11}, \quad \varphi_{12}(\xi) = \xi_{12}, \quad \varphi_{13}(\xi) = \xi_1 \xi_{11} + \xi_2 \xi_{12},$$
$$\varphi_{21}(\xi) = \xi_{21}, \quad \varphi_{22}(\xi) = \xi_{22}, \quad \varphi_{23}(\xi) = \xi_1 \xi_{21} + \xi_2 \xi_{22},$$
$$\varphi_{31}(\xi) = \xi_{31}, \quad \varphi_{32}(\xi) = \xi_{32}, \quad \varphi_{33}(\xi) = \xi_1 \xi_{31} + \xi_2 \xi_{32}.$$

Wir führen ferner neun Variable x_{ik} ein $(i, k = 1, 2, 3)$ und betrachten die lineare Substitution

$$\mathfrak{S} F(x) = F(\varphi(\xi))$$

und ihr Spiegelbild $\mathfrak{S}'$.

---

[23]) Vgl. Mertens l. c., wo auf den letzten Seiten die Verallgemeinerung auf höhere Räume behandelt wird.

Wir fixieren ein Gradzahlenpaar s, t und verstehen unter (F) die Menge aller derjenigen Formen $F(x)$, die

$$\text{in } x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{12}, x_{22}, x_{32} \text{ homogen vom Grade } s,$$
$$\text{in } x_{13}, x_{23}, x_{33} \text{ homogen vom Grade } t$$

sind, und unter (G) die Menge aller derjenigen Formen $G(\xi)$, die

$$\text{in } \xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31}, \xi_{12}, \xi_{22}, \xi_{32} \text{ homogen vom Grade } s+t,$$
$$\text{in } \xi_1, \xi_2 \text{ homogen vom Grade } t$$

sind. Dann sind (F) und (G) einander entsprechende Abschnitte, wenn man $\mathfrak{R}$ auf (F) und $\bar{\mathfrak{R}}'$ auf (G) anwendet. Auf solche doppelthomogene Formen übertragen sich die allgemeinen Entwicklungen unmittelbar, da sich vermöge der expliziten Formeln des Satzes V die doppelte Homogeneität von $f_1(x), \ldots, f_h(x)$, $F(x)$ auf $\Phi(x)$ und $M(x)$ überträgt und die an Satz II geknüpfte Bemerkung anwendbar bleibt[24]).

Der Kern von $\mathfrak{R}$ ist

$$\mathfrak{R}(\xi; \bar{x}) = e^{\Sigma \xi_{i1} \bar{x}_{i1} + \Sigma \xi_{i2} \bar{x}_{i2}} \cdot e^{\Sigma (\xi_1 \xi_{i1} + \xi_2 \xi_{i2}) \bar{x}_{i3}}$$

und die Summe der den Abschnitten (F) und (G) entsprechenden Glieder daraus

$$\frac{1}{s!}(\Sigma \xi_{i1} \bar{x}_{i1} + \Sigma \xi_{i2} \bar{x}_{i2})^s \cdot \frac{1}{t!}(\Sigma (\xi_1 \xi_{i1} + \xi_2 \xi_{i2}) \bar{x}_{i3})^t,$$

worin die Summen Σ über $i = 1, 2, 3$ zu erstrecken sind. Der dem ersten Faktor entsprechende Polarenprozeß $\frac{1}{s!}\left(\Sigma x_{i1} \frac{\partial}{\partial \xi_{i1}} + \Sigma x_{i2} \frac{\partial}{\partial \xi_{i2}}\right)^s$ hat bekanntlich, wenn er auf eine Form vom Grade s der sechs Variablen ξ_{i1}, ξ_{i2} angewendet wird, einfach die Wirkung, diese Variablen durch die x_{i1}, x_{i2} zu ersetzen, wie übrigens auch aus dem Vergleich des ersten Faktors des Kernes $\mathfrak{R}(\xi; \bar{x})$ mit dem in § 1 über den Kern der identischen linearen Substitution Bemerkten erhellt. *Daher wird für jede Form*

$$G(\xi) = G\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_1 \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_2 \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \end{pmatrix}$$

aus (G):

$$\bar{\mathfrak{R}}' G(\xi) = \frac{1}{t!}\left(\Sigma x_{i3}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial x_{i1}} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial x_{i2}}\right)\right)^t G\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \xi_1 \\ x_{21} & x_{22} & \xi_2 \\ x_{31} & x_{32} & \end{pmatrix} \tag{18}$$

oder

$$\bar{\mathfrak{R}}' G(\xi) = \frac{1}{t!}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\Sigma x_{i3}\frac{\partial}{\partial x_{i1}} + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\Sigma x_{i3}\frac{\partial}{\partial x_{i2}}\right)^t G\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \xi_1 \\ x_{21} & x_{22} & \xi_2 \\ x_{31} & x_{32} & \end{pmatrix}.$$

[24]) In D_{18} findet man von vorneherein einen allgemeineren Ansatz zugrundegelegt.

Ferner läßt sich jede Form $\Phi(x)$ aus (F), die sich durch geeignete Wahl einer Form $G(\xi)$ aus (G) in die Gestalt $\Phi(x) = \overline{\mathfrak{R}}' G(\xi)$ bringen läßt, auch durch geeignete Wahl einer Form

$$\hat{F}(x) = \hat{F}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

aus (F) in die Gestalt $\Phi(x) = \overline{\mathfrak{R}}' \mathfrak{R}\, \hat{F}(x)$ bringen, d. h. man kann $\Phi(x)$ derart in die Gestalt (18) setzen, daß man dabei auf der rechten Seite von (18)

$$G\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \xi_1 \\ x_{21} & x_{22} & \xi_2 \\ x_{31} & x_{32} & \end{pmatrix} = \hat{F}\begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \xi_1 x_{11} + \xi_2 x_{12} \\ x_{21}, & x_{22}, & \xi_1 x_{21} + \xi_2 x_{22} \\ x_{31}, & x_{32}, & \xi_1 x_{21} + \xi_2 x_{32} \end{pmatrix} \tag{19}$$

wählt.

Den allgemeinen Entwicklungen gemäß haben wir nun nach denjenigen doppelthomogenen Formen $M(x)$ zu fragen, die der Bedingung $0 = M(\varphi(\xi))$, d. i.

$$0 = M\begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \xi_1 x_{11} + \xi_2 x_{12} \\ x_{21}, & x_{22}, & \xi_1 x_{21} + \zeta_2 x_{22} \\ x_{31}, & x_{32}, & \xi_1 x_{31} + \xi_2 x_{32} \end{pmatrix} \tag{20}$$

genügen. Das sind aber bekanntlich diejenigen, welche der Kongruenz

$$M(x) \equiv 0 \mod \Delta(x)$$

genügen, wenn mit $\Delta(x)$ die Determinante

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

bezeichnet wird. Denn einerseits ist $\Delta(\varphi(\xi)) = 0$. Anderseits folgt aus der Annahme der in ξ_1, ξ_2 identischen Gleichung (20) durch Einsetzung von $\xi_1 = \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_{31}}$, $\xi_2 = \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_{32}}$ zunächst die Kongruenz $\left(\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_{33}}\right)^t \cdot M(x) \equiv 0 \mod \Delta(x)$, und hieraus, da die ganzen rationalen Funktionen $\Delta(x)$ und $\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_{33}}$ teilerfremd sind, die Kongruenz $M(x) \equiv 0 \mod \Delta(x)$. Die Form $\Delta(x)$ erfüllt selbst die Bedingung der doppelten Homogeneität.

Den Prozeß $\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ pflegt man mit Ω zu bezeichnen:

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}}, & \frac{\partial}{\partial x_{12}}, & \frac{\partial}{\partial x_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{21}}, & \frac{\partial}{\partial x_{22}}, & \frac{\partial}{\partial x_{23}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{31}}, & \frac{\partial}{\partial x_{32}}, & \frac{\partial}{\partial x_{33}} \end{vmatrix}.$$

Für diesen Ω-Prozeß erhalten wir nun aus den allgemeinen Entwickelungen unmittelbar den Satz, daß diejenigen Formen $\Phi(x)$ aus (F), welche der Differentialgleichung

$$0 = \Omega\,\Phi(x)$$

genügen, identisch sind mit denjenigen, welche sich durch geeignete Wahl einer Form $G(\xi)$ aus (G) in die Gestalt (18) *setzen lassen*[25]).

Ebenso würde man für den einfacheren Fall einer zweireihigen Determinante:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}, \quad \Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}}, & \frac{\partial}{\partial x_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{21}}, & \frac{\partial}{\partial x_{22}} \end{vmatrix}$$

(vgl. §§ 5 und 9) den bekannten Satz erhalten, daß diejenigen Formen $\Phi(x)$, welche der Differentialgleichung

$$0 = \Omega\,\Phi(x)$$

genügen und in x_{11}, x_{21} homogen vom Grade s, in x_{12}, x_{22} homogen vom Grade t sind, mit denjenigen identisch sind, die sich durch geeignete Wahl einer Form $G(x)$ der beiden Variablen x_{11}, x_{21} *allein* vom Grade $s+t$ in die Gestalt

$$\Phi(x) = \left(x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{21}}\right)^t G(x)$$

bringen lassen.

§ 13.

Bemerkung über die Tragweite des Hilbertschen Endlichkeitskriteriums.

Die in § 8 auseinandergesetzte Anwendung des Satzes IX von der Endlichkeit der Formenstaaten auf die Endlichkeit der zu gewissen Gruppen **G** gehörigen Invariantenbereiche legt die Frage nahe, ob man die Methode so ausbauen kann, daß man den Fall einer beliebigen Gruppe **G** von linearen Transformationen beherrscht. Das ist nun unmöglich, weil das zugrunde liegende Hilbertsche Endlichkeitskriterium selbst nicht so weit reicht. *Es gibt nämlich solche Gruppen* **G** *von linearen Transformationen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, daß der Integritätsbereich der bei* **G** *invarianten Formen $F(x)$ endlich ist, ohne dem Hilbertschen Endlichkeitskriterium zu genügen.* Das wollen wir durch ein Beispiel belegen.

---

[25]) Der Gedanke, die allgemeinen Entwicklungen des § 11 auf das Beispiel des durch Nullsetzen der Determinante definierten algebraischen Gebildes anzuwenden, ist, soviel mir erinnerlich ist, zuerst von E. Noether gefaßt worden (1911), nachdem ich ihr den wesentlichen Inhalt des § 11 mitgeteilt hatte. Vgl. ferner E. Noether, Math. Ann. 77 und 81.

Wir betrachten in vier Variablen $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ die Transformation

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{11} &= x_{11}, \quad \mathfrak{x}_{12} = \lambda x_{11} + x_{12} \\ \mathfrak{x}_{21} &= x_{21}, \quad \mathfrak{x}_{22} = \lambda x_{21} + x_{22}, \end{aligned}$$

worin λ eine Konstante und die $\mathfrak{x}$ die neuen Variablen sind, und die Gruppe **G**, die man erhält, wenn man hierin λ alle komplexen Zahlen durchlaufen läßt. Die bei **G** invarianten Formen sind also diejenigen Formen $F(x)$ der x, welche identisch in λ und den x der Funktionalgleichung

$$F\begin{pmatrix} x_{11}, & \lambda x_{11} + x_{12} \\ x_{21}, & \lambda x_{21} + x_{22} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12} \\ x_{21}, & x_{22} \end{pmatrix} \tag{21}$$

genügen. Spezielle Lösungen dieser Funktionalgleichung sind nun:

$$F_0(x) = \begin{vmatrix} x_{11}, & x_{12} \\ x_{21}, & x_{22} \end{vmatrix}, \quad F_1(x) = x_{11}, \quad F_2(x) = x_{21}.$$

Es ist aber aus der Determinantentheorie bekannt[26]), daß die einzigen der Funktionalgleichung (21) genügenden Formen diejenigen Formen sind, die sich aus den drei genannten ganzrational zusammensetzen lassen. Zunächst nämlich erkennt man, indem man in (21) beiderseits die Glieder aufsucht, die in den drei Variablen λ, x_{12}, x_{22} einen bestimmten Grad haben, daß man sich auf den Fall beschränken kann, daß $F(x)$ in x_{12}, x_{22} homogen, etwa vom Grade s, ist. Wählt man nun in (21) $\lambda = -\frac{x_{22}}{x_{21}}$, so erhält man die Gleichung $F\begin{pmatrix} x_{11}, & -1 \\ x_{21}, & 0 \end{pmatrix} \cdot [F_0(x)]^s = x_{21}^s \cdot F(x)$, aus welcher die ganzrationale Darstellbarkeit von $F(x)$ durch $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ unmittelbar ersichtlich ist. Der aus allen bei **G** invarianten Formen bestehende Integritätsbereich ist also endlich. Nun besteht aber zwischen den Invarianten $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ die Kongruenz

$$F_0(x) \equiv 0 \mod F_1(x), F_2(x),$$

und zwar sind die einzigen Formen $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, für welche

$$F_0(x) = Q_1(x) F_1(x) + Q_2(x) F_2(x)$$

wird, die Formen

$$Q_1(x) = c x_{21} + x_{22}, \quad Q_2(x) = -(c x_{11} + x_{12}),$$

worin c eine beliebige Konstante bedeutet. Wie man aber auch die

[26]) Der Satz, für Determinanten beliebiger Reihenzahl, dürfte von **Mertens** stammen. Einige historische Notizen findet man in § 5 meiner Note „Verallgemeinerung des Sylvesterschen Determinantensatzes" Crelle **135**.

Konstante c wählen mag, niemals sind $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ bei $\mathfrak{G}$ invariant. Das Hilbertsche Kriterium ist also nicht erfüllt.

§ 14.

Verallgemeinerung des Satzes von der Endlichkeit der Formenstaaten.

Trotzdem hat es ein Interesse, den Satz von der Endlichkeit der Formenstaaten zu verallgemeinern, weil man dadurch erfährt, was an den definierenden Eigenschaften eines Formenstaates für das Zustandekommen des Endlichkeitssatzes wesentlich ist. Was wir, als unnötig speziell, abstreifen wollen, ist nun die Benutzung des Konjugiertkomplexen. *Dementsprechend werden wir in diesen letzten Paragraphen eine andere Definition der Orthogonalität zugrunde legen als bisher.* Dabei werden wir es nur mit Formen gleichen Grades zu tun haben und können daher die Definition so fassen. Es sei $F(x)$ eine Form vom Grade s der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und $G(u)$ eine Form vom Grade s der Variablen $u_1, \ldots, u_n$; dann heißen $F(x)$ und $G(u)$ zueinander *orthogonal*, in Zeichen

$$F(x) \perp G(u) \quad \text{oder} \quad G(u) \perp F(x),$$

wenn

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = 0$$

ist, d. h. wenn, unter $\mathfrak{p}_1(x)$, $\mathfrak{p}_2(x), \ldots$ jetzt bloß die endlich vielen normierten Potenzprodukte vom Grade s verstanden und

$$F(x) = a_1 \mathfrak{p}_1(x) + a_2 \mathfrak{p}_2(x) + \ldots, \quad G(u) = b_1 \mathfrak{p}_1(u) + b_2 \mathfrak{p}_2(u) + \ldots$$

gesetzt, die Beziehung

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots = 0$$

gilt.

Wir behaupten nun die folgende Verallgemeinerung des Satzes von der Endlichkeit der Formenstaaten:

Satz XIV. *Es sei $\mathfrak{F}$ ein Integritätsbereich von Formen der Variablen $x, \ldots, x_n$ und $\mathfrak{G}$ ein Integritätsbereich von Formen der Variablen $u, \ldots, u_n$. Diese Integritätsbereiche mögen in der Beziehung stehen, daß für jede Form $g(u)$ aus $\mathfrak{G}$ und für jede Form $F(x)$ aus $\mathfrak{F}$ die Form*

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$$

eine Form von $\mathfrak{F}$ ist[27]*. Ferner mögen für jede einzelne Gradzahl die beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt sein: abgesehen von den identisch verschwindenden Formen soll*

[27]) Vgl. § 8.

I. *keine Form vom Grade s aus $\mathfrak{F}$ zu den sämtlichen Formen vom Grade s aus $\mathfrak{G}$ orthogonal,*

II. *keine Form vom Grade s aus $\mathfrak{G}$ zu den sämtlichen Formen vom Grade s aus $\mathfrak{F}$ orthogonal*

sein. Dann ist der Integritätsbereich $\mathfrak{G}$ endlich und zwar dem Hilbertschen Endlichkeitskriterium genügend.

In diesem Satze ist der Satz von der Endlichkeit der Formenstaaten als Spezialfall enthalten. Ist nämlich $\mathfrak{F}$ ein Formenstaat und $\mathfrak{G}$ die Menge der Formen $g(u) = f(u)$, unter $f(x)$ alle Formen von $\mathfrak{F}$ verstanden, so kann man zu jeder Form $F(x)$ vom Grade s aus $\mathfrak{F}$, abgesehen von der identisch verschwindenden, sofort eine Form vom Grade s aus $\mathfrak{G}$ angeben, zu der sie nicht orthogonal ist, nämlich die Form $\bar{F}(u)$.

Dem Beweise des Satzes XIV schicken wir die Einführung einer Bezeichnung voraus. Dabei sollen mit eingeklammerten Buchstaben Formenscharen im ursprünglichen Sinne des Wortes bezeichnet werden, also solche Mengen von Formen eines und desselben Grades s, daß jede von irgend endlichen vielen Formen der Menge linearabhängige Form ebenfalls der Menge angehört. Ist nun (F) eine Schar von Formen des Grades s der Variablen x und (G) eine Schar von Formen des Grades s der Variablen u, so wollen wir mit

$$(F_{\perp G}) \quad \text{und} \quad (G_{\perp F})$$

die beiden folgenden Teilscharen von (F) und (G) bezeichnen: mit $(F_{\perp G})$ die Menge aller derjenigen Formen aus (F), die zu sämtlichen Formen von (G) orthogonal sind, und mit $(G_{\perp F})$ die Menge aller derjenigen Formen aus (G), die zu sämtlichen Formen von (F) orthogonal sind. Ferner soll (0) die nur aus der identisch verschwindenden Form bestehende Formenschar bedeuten.

Nach Einführung dieser Bezeichnung können wir die Voraussetzungen I und II des Satzes XIV, wenn wir mit (F) die Menge aller Formen vom Grade s aus $\mathfrak{F}$ und mit (G) die Menge aller Formen vom Grade s aus $\mathfrak{G}$ bezeichnen, in die Gestalt:

(I) $$(F_{\perp G}) = (0)$$

(II) $$(G_{\perp F}) = (0)$$

setzen.

Dies vorausgeschickt, wenden wir uns dem Beweise des Satzes XIV *zu.* Es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ dem Hilbertschen Endlichkeitskriterium genügt. Wir denken uns also aus $\mathfrak{G}$ endlich viele Formen

$$g_1(u), \ldots, g_h(u)$$

on den Graden $l_1, \ldots, l_h$ nach Belieben herausgegriffen und eine Grad-ahl s fixiert. Wir bilden nun einerseits die Menge (M) aller derjenigen ormen $M(u)$ aus (G), welche der Kongruenz

$$M(u) \equiv 0 \quad \text{modd. } g_1(u), \ldots, g_h(u)$$

enügen. anderseits die Menge (M^*) aller derjenigen Formen $M^*(u)$ aus $G)$, welche sich durch geeignete Wahl von Formen $g_1^*(u), \ldots, g_h^*(u)$ aus $\mathfrak{H}$ von den Graden $s - l_1, \ldots, s - l_h$ in die Gestalt

$$M^*(u) = g_1^*(u)\, g_1(u) + \ldots + g_h^*(u)\, g_h(u)$$

etzen lassen. Dann ist $(M^*) \leqq (M)$, d. h. (M^*) Teilmenge von (M), *und s kommt nur darauf an, zu zeigen, daß* $(M^*) = (M)$ *ist. Der Beweis wird un aus zwei Teilen bestehen.* Im ersten Teile werden wir beweisen, daß

$$(F_{\perp M^*}) = (F_{\perp M}) \tag{22}$$

st, und zwar wird das durch Anwendung der Voraussetzung I auf die Gradzahlen $s - l_1, \ldots, s - l_h$ gelingen. Im zweiten Teile werden wir dann araus durch Anwendung der Voraussetzung II weiter

$$(M^*) = (M)$$

rschließen.

Erster Teil des Beweises. Es sei $F(x)$ eine Form aus $(F_{\perp M^*})$, . h. eine solche Form vom Grade s aus $\mathfrak{F}$, daß

$$M^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = 0 \text{ für alle } M^*(x) \text{ aus } (M^*)$$

ilt. Dann ist insbesondere für jeden einzelnen der Werte $\varkappa = 1, \ldots, h$

$$g_\varkappa^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = 0 \text{ für alle } g_\varkappa^*(u) \text{ vom Grade } s - l_\varkappa \text{ aus } \mathfrak{G}.$$

Die Form $g_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$, die den Grad $s - l_\varkappa$ hat, ist also orthogonal zu den sämtlichen Formen vom Grade $s - l_\varkappa$ aus $\mathfrak{G}$. Sie gehört aber, nach der zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ vorausgesetzten Beziehung, zu $\mathfrak{F}$. Daher kann man nach Voraussetzung I schließen, daß sie identisch verschwindet. Es ist also

$$g_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = 0, \ldots, g_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = 0$$

und daher auch

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = 0 \text{ für alle Formen } M(x) \text{ aus } (M),$$

d. h. $F(x)$ gehört zu $(F_{\perp M})$. Es ist also bewiesen, daß jede Form von $(F_{\perp M^*})$ auch zu $(F_{\perp M})$ gehört. Das Umgekehrte ist aber wegen $(M^*) \leqq (M)$ trivial. Damit ist (22) bewiesen.

Dem zweiten Teile des Beweises schicken wir einen Hilfssatz über Formenscharen voraus.

§ 15.

Einschaltung eines Hilfssatzes.

Sind (G) und (H) zwei Scharen von Formen des Grades s der Variablen $u_1, \ldots, u_n$, so werden mit

$$\text{Verein.}(G, H) \quad \text{und} \quad \text{Schnitt}(G, H)$$

bezeichnet: die Menge aller derjenigen Formen, welche sich (auf mindestens eine Weise) als Summe einer Form von (G) und einer Form von (H) darstellen lassen, und die Menge aller derjenigen Formen, welche den Scharen (G) und (H) gemeinsam sind. Diese beiden Mengen sind wieder Scharen.

Hilfssatz. *Es sei (F) eine Schar von Formen des Grades s der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und (G) eine Schar von Formen des Grades s der Variablen $u_1, \ldots, u_n$. Ist dann (G^*) eine Schar, welche Teilmenge von (G) ist, und wird zur Abkürzung*

$$(F_{\perp G^*}) = (F^*) \tag{23}$$

gesetzt, so gilt die Beziehung:

$$\text{Verein.}(G^*, G_{\perp F}) = (G_{\perp F^*}). \tag{24}$$

Daß nämlich jede Form der in (24) links stehenden Menge auch der in (24) rechts stehenden Menge angehört, ist klar, weil sowohl (G^*) als $(G_{\perp F})$ Teilmengen von $(G_{\perp F^*})$ sind. *Es bleibt also noch das Umgekehrte zu zeigen; dafür wollen wir zwei Beweise geben.*

Wir greifen aus (F) endlich viele Formen

$$F_1(x), \; F_2(x), \; \ldots$$

so heraus, daß jede Form von (F) von den herausgegriffenen linearabhängig ist; ebenso greifen wir aus (G^*) endlich viele Formen

$$G_1^*(u), \; G_2^*(u), \; \ldots$$

so heraus, daß jede Form von (G^*) von den herausgegriffenen linearabhängig ist. Nun sei $G(u)$ eine Form aus $(G_{\perp F^*})$. Sind dann $p_1, p_2, \ldots$ solche Konstanten, daß zwischen ihnen die linearen Gleichungen (mit konstanten Koeffizienten)

$$\begin{aligned} &G_1^*\left(\begin{matrix} c \\ cx \end{matrix}\right) F_1(x) \cdot p_1 + G_1^*\left(\begin{matrix} c \\ cx \end{matrix}\right) F_2(x) \cdot p_2 + \ldots = 0 \\ &G_2^*\left(\begin{matrix} c \\ cx \end{matrix}\right) F_1(x) \cdot p_1 + G_2^*\left(\begin{matrix} c \\ cx \end{matrix}\right) F_2(x) \cdot p_2 + \ldots = 0 \\ &\qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \end{aligned} \tag{25}$$

bestehen, so ist

$$p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + \ldots$$

eine Form von (F^*); daher ist $G(u)$ zu ihr orthogonal:

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F_1(x) \cdot p_1 + G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F_2(x) \cdot p_2 + \ldots = 0. \tag{26}$$

Die Gleichung (26) für $p_1, p_2, \ldots$ ist also eine Folge des Systems (25). Folglich gibt es solche Konstanten $q_1, q_2, \ldots$, daß für jede einzelne der Formen $F_i(x)$ die Gleichung:

$$\left(G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - q_1 G_1^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - q_2 G_2^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - \ldots\right) F_i(x) = 0$$

besteht, d. h. daß die Form

$$G(u) - q_1 G_1^*(u) - q_2 G_2^*(u) - \ldots$$

der Schar $(G_{\perp F})$ angehört. Damit ist gezeigt, daß $G(u)$ der Schar Verein. $(G^*, G_{\perp F})$ angehört, w. z. b. w.[28]).

Der zweite Beweis beruht auf der Bemerkung, daß es genügt, zu beweisen, daß die beiden Seiten von (24) gleichen Rang haben. Dabei wird allgemein unter dem Range

$$\text{Rang}(G)$$

einer Schar (G) die Anzahl der linearunabhängigen unter den Formen von (G) verstanden. Berücksichtigt man nun die für zwei beliebige Scharen (G) und (H) gültige Relation

$$\text{Rang Verein.}(G, H) + \text{Rang Schnitt}(G, H) = \text{Rang}(G) + \text{Rang}(H)$$

und bedenkt ferner, daß in unserem Falle

$$\text{Schnitt}(G^*, G_{\perp F}) = (G^*_{\perp F})$$

[28]) Diesen Beweis kann man auch so ausdrücken:

Es bezeichne (X) die Gesamtheit aller Formen des Grades s der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und (U) die Gesamtheit aller Formen des Grades s der Variablen $u_1, \ldots, u_n$. Dann ist nach (23)

$$(F^*) = \text{Schnitt}(X_{\perp G^*}, F) = \text{Schnitt}(X_{\perp G^*}, X_{\perp (U_{\perp F})}) = (X_{\perp \text{Verein.}(G^*, U_{\perp F})}),$$

daher

$$(U_{\perp F^*}) = \text{Verein.}(G^*, U_{\perp F}).$$

Jede Form $H(u)$ aus $(U_{\perp F^*})$ läßt sich also in die Gestalt

$$H(u) = G^*(u) + H_1(u)$$

setzen, worin $G^*(u)$ aus (G^*) und $H_1(u)$ aus $(U_{\perp F})$ entnommen ist. Nimmt man nun für $H(u)$ speziell eine Form $G(u)$ aus $(G_{\perp F^*})$, so wird $H_1(u)$ als Differenz von $G(u)$ und $G^*(u)$ ebenfalls eine Form aus (G). Also ist $H_1(u)$ eine Form von $(G_{\perp F})$ und daher $G(u)$ eine Form von Verein. $(G^*, G_{\perp F})$, w. z. b. w.

ist, so erkennt man, daß es sich nur um den Beweis der Gleichung:

$$(27) \qquad \text{Rang}\,(G^*) + \text{Rang}\,(G_{\perp F}) = \text{Rang}\,(G^*_{\perp F}) + \text{Rang}\,(G_{\perp F^*})$$

handelt[29]). Den Beweis dieser Gleichung führen wir nun auf die folgende *allgemeinere Betrachtung* zurück.

Ist (F) eine Schar von Formen vom Grade s der Variablen x und (G) eine Schar von Formen vom Grade s der Variablen u, so besteht, wie wir zeigen wollen, stets die Relation

$$(28) \qquad \text{Rang}\,(F) - \text{Rang}\,(F_{\perp G}) = \text{Rang}\,(G) - \text{Rang}\,(G_{\perp F}),$$

und wir nennen den gemeinsamen Wert beider Seiten den Faltungsrang

$$\text{Rang}\,(F, G)$$

der beiden Scharen (F) und (G)[30]). Greift man nämlich aus (F) endlich viele Formen

$$F_i(x) = a_{i1}\,\mathfrak{p}_1(x) + a_{i2}\,\mathfrak{p}_2(x) + \ldots, \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

worin $\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x), \ldots$ die normierten Potenzprodukte vom Grade s bedeuten, so heraus, daß jede Form aus (F) von den herausgegriffenen linearabhängig ist, und bezeichnet die Matrix $(a_{i\nu})$ mit A und ihre transponierte mit A'; greift man ebenso aus (G) endlich viele Formen

$$G_j(u) = b_{j1}\,\mathfrak{p}_1(u) + b_{j2}\,\mathfrak{p}_2(u) + \ldots \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

so heraus, daß jede Form aus (G) von den herausgegriffenen linearabhängig ist, und bezeichnet die Matrix $(b_{j\nu})$ mit B und ihre transponierte mit B'; dann ist die linke Seite von (28) der Rang der Matrix $B \cdot A'$ und die rechte Seite von (28) der Rang der Matrix $A \cdot B'$. Diese beiden Matrices haben aber in der Tat denselben Rang.

[29]) Man kann sie symmetrischer schreiben, wenn man im ersten Gliede noch berücksichtigt, daß $(G^*) = (G^*_{\perp F^*})$ ist.

[30]) Mittels dieses Begriffes kann man der Relation (27) auch die Gestalt

$$\text{Rang}\,(F, G) = \text{Rang}\,(F, G^*) + \text{Rang}\,(F^*, G)$$

geben. — Ferner kann man die Voraussetzungen I und II des Satzes XIV auch so fassen: *für jede Gradzahl s soll*, wenn wieder (F) und (G) die Mengen der Formen vom Grade s aus $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ bedeuten, *die Beziehung*:

$$\text{Rang}\,(F) = \text{Rang}\,(G) = \text{Rang}\,(F, G)$$

bestehen. Sind also $F_1(x), \ldots, F_\mu(x)$ linearunabhängige Formen aus (F), von denen jede Form aus (F) linearabhängig ist, und $G_1(u), \ldots, G_\nu(u)$ linearunabhängige Formen aus (G), von denen jede Form aus (G) linearabhängig ist, so soll $\mu = \nu$ und

$$\text{Determinante}_{i,j=1,\ldots,\mu} \left| G_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F_i(x) \right| \neq 0 \text{ sein.}$$

Von der Relation (28) ist nun (27) eine einfache Folgerung. Wendet man nämlich die Relation (28) dreimal an, und zwar auf die Formenpaare $(F), (G)$; $(F), (G^*)$; $(F^*), (G)$ und subtrahiert die erste der entstehenden Gleichungen von der Summe der beiden andern, so erhält man unter Berücksichtigung der Beziehung $(F_{\perp G}) = (F^*_{\perp G})$ sofort (27).

Aus dem Hilfssatze ziehen wir nun die Folgerung:

Es sei (F) eine Schar von Formen des Grades s der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und (G) eine Schar von Formen des Grades s der Variablen $u_1, \ldots, u_n$, und es werde vorausgesetzt, daß

$$(G_{\perp F}) = (0)$$

ist. Ist dann (G^*) eine Schar, welche Teilmenge von (G) ist, und wird die Schar (F^*) durch

$$(F^*) = (F_{\perp G^*})$$

definiert, so ist

$$(G^*) = (G_{\perp F^*})$$

und also (G^*) durch (F^*) zurückbestimmt.

Dabei kann man übrigens noch bemerken, daß die Voraussetzung

$$(G_{\perp F}) = (0)$$

auch notwendig ist, damit der angegebene Sachverhalt für jede Schar $(G^*) \leqq (G)$ statthat; das sieht man sofort, indem man $(G^*) = (0)$ wählt.

§ 16.

Beendigung des Beweises von Satz XIV.

Zweiter Teil des Beweises. Auf Grund der Voraussetzung II können wir gemäß der soeben aus dem Hilfssatze gezogenen Folgerung sofort die beiden Beziehungen

$$(M^*) = (G_{\perp (F_{\perp M^*})}), \quad (M) = (G_{\perp (F_{\perp M})})$$

aufstellen. Aus diesen folgt aber wegen (22) unmittelbar die Behauptung $(M^*) = (M)$ des zu beweisenden Satzes.

Damit ist der Beweis des Satzes XIV beendet.

(Eingegangen am 25. August 1922.)

Nachtrag zu der Abhandlung „Modulsysteme und Differentialgleichungen".

Von

E. Fischer.

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit mag auch das Ergebnis des § 11 noch ausdrücklich in Sätzen formuliert werden.

Satz XV. *Es seien n Variable $x_1, \ldots, x_n$ und n Formen $\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)$ gleichen Grades $\sigma > 0$ von v Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_v$ gegeben.* Aus jeder Form $\hat{F}(x)$ der x vom Grade s entsteht eine Form $\hat{F}(\varphi(\xi))$ der ξ vom Grade $s \cdot \sigma$, und es ist offenbar

$$\hat{F}(\varphi(\xi)) = \frac{1}{s!}\left(\varphi_1(\xi)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \varphi_n(\xi)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^s \hat{F}(x).$$

Jede Form $F(x)$ der x vom Grade s kann auf eine und nur eine Weise in die Summe

$$F(x) = \Phi(x) + M(x) \tag{29}$$

von zwei solchen Formen gespalten werden, daß $M(x)$ der Gleichung

$$0 = M(\varphi(\xi)) \tag{30}$$

genügt und $\Phi(x)$ vermittelst einer Form $G(\xi)$ der ξ vom Grade $s \cdot \sigma$ in die Gestalt

$$\Phi(x) = \frac{1}{s!}\left(x_1\overline{\varphi}_1\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) + \ldots + x_n\overline{\varphi}_n\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\right)^s G(\xi) \tag{31}$$

gesetzt werden kann. — Wenn eine Form $\Phi(x)$ in die Gestalt (31) gesetzt werden kann, so läßt sich darin $G(\xi)$ auf eine und nur eine Weise so wählen, daß sie vermittelst einer Form $\hat{F}(x)$ der x in die Gestalt $G(\xi) = \hat{F}(\varphi(\xi))$ gebracht werden kann.[31])

Satz XVI. *Sind n Formen $\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)$ gleichen Grades $\sigma > 0$ von v Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_v$ gegeben, so wähle man solche Formen $f_1(x), \ldots, f_h(x)$*

[31]) Zur Herstellung der Spaltung (29) gibt Satz IV (wobei wieder die von § 3 abweichende Verteilung der Buchstaben in § 11 zu beachten ist) explizite Formeln; in speziellen Fällen können sich diese sehr vereinfachen, vgl. Formel (17).

von n Variablen $x_1, \ldots, x_n$, daß unter allen Formen der x die der Gleichung (30) genügenden $M(x)$ mit den der Kongruenz

$$M(x) \equiv 0 \mod f_1(x), \ldots, f_h(x)$$

genügenden $M(x)$ identisch sind. Dann sind unter allen Formen vom Grade s der x die der Darstellung (31) fähigen $\Phi(x)$ identisch mit denjenigen $\Phi(x)$, welche dem System von Differentialgleichungen

$$0 = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x), \quad \ldots, \quad 0 = \bar{f}_h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x)$$

genügen.

(Eingegangen am 3. August 1923.)

Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien.

Von

Øystein Ore in Kristiania.

Es sollen in dieser Arbeit einige Untersuchungen über die Reduzibilität von algebraischen Gleichungen durchgeführt und zugleich einige allgemeine Sätze aufgestellt werden, aus denen die meisten auf diesem Gebiete früher bekannten Resultate einfach abgeleitet werden können. Weil aber mehrere wichtige Untersuchungen ziemlich unbekannt sind, soll hier eine kurze historische Übersicht gegeben werden. Der erste Irreduzibilitätssatz ist schon von Schönemann[1]) aufgestellt worden, viel bekannter ist aber der in diesem Satze von Schönemann als Spezialfall enthaltene Satz von Eisenstein[2]). Die ersten Verallgemeinerungen des Satzes von Eisenstein wurden von Netto[3]) und besonders von Königsberger[4]) gegeben. Weiter wurde aber der Satz von Königsberger erstens durch Bauer[5]) und dann durch Perron[6]) verallgemeinert. Diese Resultate sind aber größtenteils aus den allgemeinen Untersuchungen von Dumas[7]) einfach ableitbar, und durch dessen Arbeit sind auch die Untersuchungen über Irreduzibilitätskriterien dieser Art zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Später hat aber Bauer[8]) einen anderen Weg eingeschlagen, indem er eine Verallgemeinerung des ursprünglichen Satzes von Schönemann be-

[1]) Th. Schönemann, Von denjenigen Moduln usw., J. für Mathematik **32**, § 61.

[2]) G. Eisenstein, Über die Irreductibilität usw., J. für Mathematik **39**, S. 160.

[3]) E. Netto, Über die Irreduktibilität usw., Math. Ann. **48**.

[4]) L. Königsberger, Über den Eisensteinschen Satz usw., J. für Mathematik **115**, S. 53.

[5]) M. Bauer, Beitrag zur Theorie der irreduziblen Gleichungen, J. für Mathematik **128**.

[6]) O. Perron, Über eine Anwendung d. Idealtheorie usw., Math. Ann. **60**, S. 452.

[7]) Dumas, Sur quelques cas d'irreductibilité etc., J. de Math. (6) **2**, S. 237.

[8]) M. Bauer, Verallgemeinerung eines Satzes von Schönemann, J. für Mathematik **128**.

wiesen hat. Es soll in dieser Arbeit gezeigt werden, wie diese Untersuchungen erheblich erweitert werden können und wie es dadurch möglich wird, alle hier erwähnten Irreduzibilitätssätze einheitlich zu entwickeln. Ich habe in einer anderen Arbeit[9]) gezeigt, wie alle diese Sätze auf der Ausnahmestellung beruhen, welche die außerwesentlichen Diskriminantenteiler einnehmen, wenn es sich um die Reduzibilität einer Gleichung für die Moduln handelt, welche Potenzen von solchen Primzahlen sind.

§ 1.

Entwicklungen $(p, \varphi(x))$.

Es sei das Polynom

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

gegeben, wo alle Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze rationale Zahlen sind. Sei weiter p eine ganze rationale Primzahl und $\varphi(x)$ eine Primfunktion $(\mathrm{mod}\, p)$ vom Grade m. Die Primfunktion $\varphi(x)$ soll derart gewählt werden, daß die Bedingung

$$f(x) \equiv 0 \,(\mathrm{modd}\, p, \varphi(x))$$

erfüllt ist. Man kann dann

$$f(x) = \varphi(x)^e \cdot Q(x) + p \cdot M(x) \tag{1}$$

schreiben, wo $Q(x)$ nicht $(\mathrm{mod}\, p)$ durch $\varphi(x)$ teilbar ist.

$f(x)$ soll jetzt nach Potenzen von $\varphi(x)$ entwickelt werden

$$f(x) = \sum_{i=0}^{s} A_i Q_i(x) \varphi(x)^i \tag{2}$$

in der Weise, daß alle Polynome $Q_i(x)$ höchstens vom Grade $m-1$ sind. Die Koeffizienten A_i sind alle ganze Zahlen und sollen derart gewählt werden, daß, wenn $Q_i(x)$ nicht verschwindet, dieses Polynom primitiv ist. Diese Entwicklung ist, wie man leicht sehen wird, eindeutig bestimmt und durch wiederholte Division mit Potenzen von $\varphi(x)$ ausführbar. Die Zahl s ist durch $s = \left[\frac{n}{m}\right]$ bestimmt.

Aus (1) ersieht man, daß

$$A_0 \equiv A_1 \equiv \ldots \equiv A_{e-1} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$$

sein muß. Man kann daher allgemein

$$A_i = p^{\alpha_i} a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s;\ \alpha_s = 0)$$

---

[9]) Ö. Ore, Über die Reduktibilität von algebraischen Gleichungen, Kristiania Videnskapsselskaps Skrifter 1923.

annehmen und (2) erhält die Form

$$f(x) = \sum_{i=0}^{s} a_i Q_i(x)\, p^{\alpha_i} \varphi(x)^i, \tag{3}$$

wo a_i nicht durch p teilbar ist, wenn $a_i \neq 0$. Im Folgenden soll eine Entwicklung von der Form (3) eine *Entwicklung* $(p, \varphi(x))$ genannt werden.

§ 2.

Newtonsche Polygone.

Um die folgenden Untersuchungen klarer zu machen, soll ein geometrisches Hilfsmittel eingeführt werden. Wenn man die Gitterpunkte $(s - i, \alpha_i)$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem einzeichnet, wird es zu jedem Gliede in (3) einen entsprechenden Gitterpunkt geben, sobald $a_i \neq 0$ ist.

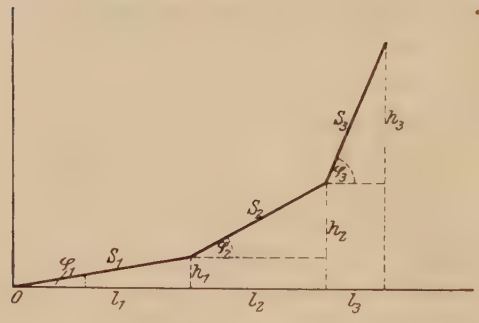

Fig. 1.

Man zeichne jetzt das Newtonsche Polygon, das zu den Punkten $(s - i, \alpha_i)$ gehört. Ein solches Polygon wird etwa die Form Fig. 1 haben und soll *das Polygon zu* $f(x)$ $(p, \varphi(x))$ heißen.

Ein solches Polygon wird aus einer gewissen Anzahl t von Seiten

$$S_1, S_2, \ldots, S_t$$

bestehen, wo S_1 immer in $(0, 0)$ anfangen muß und möglicherweise mit der X-Achse zusammenfallen kann. Die Ecken des Polygons werden von gewissen der Punkte $(s - i, \alpha_i)$ gebildet. Die Projektionen der Seiten auf die X-Achse bzw. Y-Achse seien

$$l_1, l_2, \ldots, l_t, \qquad h_1, h_2, \ldots, h_t.$$

Jede Seite S_r hat eine Neigung φ_r gegen die X-Achse, welche durch

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{h_r}{l_r} = \frac{\varkappa_r}{\lambda_r} \tag{4}$$

bestimmt ist, wo $\varkappa_r$ und λ_r keinen gemeinsamen Fakter besitzen. Für $h_1 = 0$ muß man $\lambda_1 = 1$ setzen.

Es ist zu bemerken, daß die folgenden Untersuchungen ebensogut rein arithmetisch mit Hilfe Puisseuxscher Zahlen hätten durchgeführt werden können. Das geometrische Bild macht aber den Vorgang leichter verständlich.

§ 3.

Entwicklung $(p, \varphi(x))$ eines Produkts.

Nehmen wir an, daß die Entwicklung $(p, \varphi(x))$ für jedes der beiden Polynome $g(x)$ und $h(x)$ gegeben ist, und daß die Entwicklung $(p, \varphi(x))$ für

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

bestimmt werden soll.

Es seien

$$(5) \qquad \begin{cases} g(x) = \sum_{i=0}^{s'} a_i' Q_i'(x) p^{\alpha_i'} \varphi(x)^i, \\ h(x) = \sum_{j=0}^{s''} a_j'' Q_j''(x) p^{\alpha_j''} \varphi(x)^j \end{cases}$$

die Entwicklungen $(p, \varphi(x))$ von $g(x)$ und $h(x)$. Aus (5) folgt

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{i,j=0}^{s',s''} a_i' a_j'' Q_i'(x) Q_j''(x) p^{\alpha_i' + \alpha_j''} \varphi(x)^{i+j}.$$

Um aus (6) die Entwicklung $(p, \varphi(x))$ zu erhalten, muß man

$$(7) \qquad Q_i'(x) Q_j''(x) = P_{i,j}(x) \varphi(x) + R_{i,j}(x)$$

setzen, wo $P_{i,j}(x)$ höchstens vom Grade $m-2$ ist und $R_{i,j}(x)$ höchstens vom $(m-1)$-ten Grade. Außerdem kann, wie man leicht einsieht, nicht $R_{i,j}(x) \equiv 0 \pmod{p}$ sein, wenn $Q_i'(x)$ und $Q_j''(x)$ von Null verschieden sind. Wenn $Q_i'(x)$ vom Grade n_i' und $Q_j''(x)$ vom Grade n_j'' ist, wird $P_{i,j}(x)$ vom Grade $n_i' + n_j'' - m$. Wenn $n_i' + n_j'' < m$ ist, wird $P_{i,j}(x) = 0$.

Sei jetzt

$$S_k(x) = \sum_{i+j=k} a_i' a_j'' R_{i,j}(x) p^{\alpha_i' + \alpha_j''}$$

und

$$T_k(x) = \sum_{i+j=k} a_i' a_j'' P_{i,j}(x) p^{\alpha_i' + \alpha_j''},$$

wo die Summen über alle i, j erstreckt werden, welche der Bedingung $i + j = k$ genügen. Dann folgt aus (6)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{s} (S_k(x) + T_{k-1}(x)) \varphi(x)^k,$$

wo $s = s' + s''$ oder $s = s' + s'' + 1$, je nachdem $n_{s'}' + n_{s''}'' < m$ oder $\geqq m$ ist. Wenn

$$a_k Q_k(x) p^{\alpha_k} = S_k(x) + T_{k-1}(x)$$

ist, wo $a_k p^{\alpha_k}$ so gewählt wird, daß $Q_k(x)$ primitiv ist, und α_k derart, daß a_k nicht durch p teilbar wird, so ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{s} a_k Q_k(x) p^{\alpha_k} \varphi(x)^k$$

die Entwicklung $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$.

§ 4.

Das Polygon eines Produktes.

Es soll jetzt das Polygon von $f(x) = g(x)h(x)$ bestimmt werden, wenn die Polygone von $g(x)$ und $h(x)$ $(p, \varphi(x))$ gegeben sind. Es sollen aber, ehe diese Aufgabe behandelt wird, einige Bemerkungen über Polygone $(p, \varphi(x))$ überhaupt gemacht werden. Sei

$$\psi(x) = \sum_i a_i Q_i(x) p^{\alpha_i} \varphi(x)^{n_i} \tag{8}$$

ein ganzzahliges Polynom. Hier soll, wie früher, $Q_i(x)$ primitiv sein und von einem Grade kleiner als m, a_i soll nicht durch p teilbar sein. Diese Summe (8) braucht aber nicht geordnet, d. h. die Entwicklung $(p, \varphi(x))$ für $\psi(x)$ zu sein; $\psi(x)$ kann aus allen Gliedern

$$a_i p^{\alpha_i} Q_i(x) \varphi(x)^{n_i} \tag{9}$$

bestehen, wo n_i und α_i alle positiven, ganzzahligen Werte annehmen können, wo natürlich $n_i m \leqq$ dem Grade n von $\psi(x)$ ist. Es kann auch sehr wohl eintreten, daß es mehrere Glieder (9) gibt, welche sowohl in den n_i als in den α_i übereinstimmen.

Zeichnet man jetzt alle Punkte $(s - n_i, \alpha_i)$, wo $s = \left[\frac{n}{m}\right]$ ist, in ein Koordinatensystem ein, so kann man ein Newtonsches Polygon P_1 zu diesen Punkten konstruieren. Dieses Polygon braucht aber nicht mit dem Polygone P zu $\psi(x)$ $(p, \varphi(x))$ zusammenfallen, wie leicht zu zeigen ist.

Um aus (8) die Entwicklung $(p, \varphi(x))$ von $\psi(x)$ zu erhalten, kann man alle Glieder (9) sammeln, wofür n_i dieselbe Zahl ist. Ist α_i' der kleinste Exponent von p, der in diesen Gliedern vorkommt, so wird von den Punkten $(s - n_i, \alpha_i)$ für bestimmte n_i nur $(s - n_i, \alpha_i')$ für die Konstruktion von P_1 von Bedeutung, und man sieht, daß P nicht unter P_1 fallen kann. P kann aber sehr wohl über P_1 fallen. Denn ist $(s - n_i, \alpha_i)$ ein Eckpunkt von P_1, so kann es eintreten, daß es in $\psi(x)$ mehrere Glieder gibt, für welche n_i und α_i die gleichen sind, und die Summe dieser Glieder kann dann eine höhere Potenz von p als p^{α_i} als Faktor enthalten, nie aber eine kleinere Potenz. Doch wird, wie man leicht einsieht, wenn es nur ein einziges Glied in $\psi(x)$ gibt, welches in diesem Eckpunkte von P_1 abgebildet ist, dieser Punkt auch ein Eckpunkt von P sein.

Es soll jetzt ein Polygon zu dem Produkte (6) $(p, \varphi(x))$ bestimmt werden. Es soll erstens angenommen werden, daß $s = s' + s''$ ist.

Sei

$$G = a_i' Q_i'(x) p^{\alpha_i'} \varphi(x)$$

ein Glied in $g(x)$ und

$$H = a_j'' Q_j''(x) p^{\alpha_j''} \varphi(x)^j$$

ein Glied in $h(x)$ und

$$GH = a_i' a_j'' Q_i'(x) Q_j''(x) p^{\alpha_i' + \alpha_j''} \varphi(x)^{i+j}$$

ihr Produkt. Nach (7) ist dann

$$(10) \quad GH = a_i' a_j'' P_{i,j}(x) p^{\alpha_i' + \alpha_j''} \varphi(x)^{i+j+1} + a_i' a_j'' R_{i,j}(x) p^{\alpha_i' + \alpha_j''} \varphi(x)^{i+j}.$$

Die Punkte, welche G und H repräsentieren, sind bzw.

$$(s' - i, \alpha_i') \quad \text{und} \quad (s'' - j, \alpha_j'').$$

GH wird nach (10) durch die beiden Punkte

$$(s' + s'' - i - j - 1,\ \alpha_i' + \alpha_j''), \qquad (s' + s'' - i - j,\ \alpha_i' + \alpha_j'')$$

repräsentiert, von welchen der erste möglicherweise wegfallen kann.

Den Punkt

$$(s' + s'' - i - j,\ \alpha_i' + \alpha_j'')$$

kann man aber in der Weise erhalten, daß man von O aus die Vektoren zu den Punkten $G(s' - i, \alpha_i')$ und $H(s'' - j, \alpha_j'')$ zieht und ihre Summe bildet. Der Eckpunkt dieses Vektors ist dann bekanntlich $GH(s' + s'' - i - j,\ \alpha_i' + \alpha_j'')$.

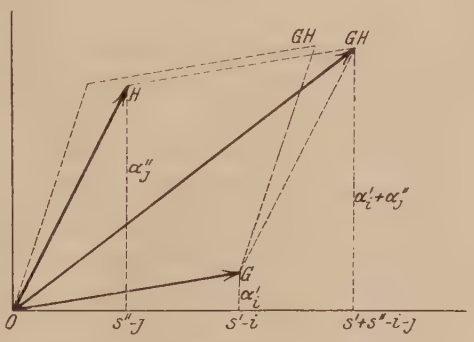

Fig. 2.

Den zweiten Punkt GH kann man z. B. in der Weise erhalten, daß man die Vektoren $O - G$ und $O - (s'' - j - 1, \alpha_j'')$ addiert. Man sieht ein, daß der Vektor $O - (s'' - j - 1, \alpha_j'')$ gegen die X-Achse eine größere Neigung als $O - H$ besitzt.

Wenn man jetzt in (6) für das Produkt GH (10) einführt, wird man für $f(x)$ eine Darstellung von der Form (8) erhalten. Seien P_G und P_H die Polygone für $g(x)$ und $h(x)$ $(p, \varphi(x))$. Man konstruiere jetzt ein Polygon S, welches aus den Seiten von P_G und P_H in der Weise gebildet ist, daß man in O anfängt und die Seiten nach steigender Neigung ordnet. Wenn zwei Seiten dieselbe Neigung besitzen, ist ihre Reihenfolge gleichgültig.

Es ist zunächst klar, daß die beiden Punkte, welche das Produkt GH repräsentieren, nach der Art wie sie erhalten sind, *über* oder möglicherweise auf dieses Polygon fallen werden. Wenn man daher das Polygon P_F zu $f(x)$ konstruiert, so wird P_F jedenfalls nicht unterhalb S fallen. Es soll gezeigt werden, daß P_F in der Tat mit S zusammenfallen muß.

Um dies zu zeigen, braucht man nach den früheren Bemerkungen nur zu beweisen, daß es Punkte GH gibt, die in die Eckpunkte von S fallen, und daß es für jede Ecke nur einen Punkt gibt.

Ein Glied in $g(x)$ und der entsprechende Punkt soll wie früher mit G bezeichnet werden, und H habe dieselbe Bedeutung für $h(x)$. Dem Produkte GH dieser Glieder entsprechen allerdings zwei Punkte, man sieht jedoch ein, daß für die Beurteilung der Frage, ob es in $f(x)$ Punkte gibt, welche in die Eckpunkte von S fallen, nur der Punkt von Bedeutung ist, welchen man durch die Summe der Vektoren OG und OH erhält. Dieser Punkt soll mit GH bezeichnet werden.

Man sieht, wenn G über P_G liegt und H über oder auf P_H, wird GH über S fallen. Wenn daher GH auf S fallen soll, muß G auf P_G und H auf P_H liegen.

Wenn aber G auf P_G liegt, kann man den Vektor OG durch das äquivalente Vektorpolygon P'_G ersetzen, welches aus den Seiten von P_G bis G besteht. Ebenso kann man OH durch das Polygon P'_H ersetzen, das aus den Seiten von P_H bis H besteht. Wenn man GH bestimmen soll, kann man die Seiten der beiden Polygone P'_G und P'_H nach steigender Neigung ordnen, und in der Weise ein Polygon P'_{GH} erhalten, dessen Endpunkt GH ist.

Wenn jetzt GH auf S fallen soll, so sieht man, daß P'_{GH} bis GH mit S zusammenfallen muß. Folglich müssen, wenn GH in einen Eckpunkt von S fallen soll, G und H Eckpunkte von P_G und P_H sein, und P'_G und P'_H müssen zusammen alle Seiten von S bis GH enthalten. Wenn umgekehrt ein Eckpunkt M von S gegeben ist, gibt es immer solche Eckpunkte G und H auf P_G und P_H derart, daß $GH = M$ wird. Wenn nämlich S die Seiten oder Vektoren

$$p_1, p_2, \ldots, p_s$$

von P_G und ebenso

$$r_1, r_2, \ldots, r_t$$

von P_H bis M enthält, so wird G durch den Eckpunkt des Summenpolygons

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_s$$

bestimmt und H in derselben Weise durch

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_t,$$

und es ist klar, daß es nur ein G und ein H derart gibt, daß $GH = M$ ist.

Dadurch ist bewiesen:

Ist

$$g(x) = \sum_{i=0}^{g'} a'_i Q'_i(x) p^{\alpha'_i} \varphi(x^{i}$$

$$h(x) = \sum_{i=0}^{g''} a''_i Q''_i(x) p^{\alpha''_i} \varphi(x)^{i},$$

so hat

$$f(x) = g(x)\,h(x) = \sum_{i=0}^{s} a_i\,Q_i(x)\,p^{\alpha_i}\varphi(x)^i \qquad (s = s' + s'')$$

ein Polygon $(p, \varphi(x))$, *das aus den Polygonen von* $g(x)$ *und* $h(x)$ *nach steigender Neigung zusammengesetzt ist.*

Wenn

$$s = s' + s'' + 1$$

ist, wird wie früher

$$GH = a_i' a_j'' P_{i,j}(x)\,p^{\alpha_i' + \alpha_j''}\varphi(x)^{i+j+1} + a_i' a_j'' R_{i,j}(x)\,p^{\alpha_i' + \alpha_j''}\varphi(x)^{i+j}$$

G und H werden durch die Punkte $(s' - i, \alpha_i')$ und $(s'' - j, \alpha_j'')$ abgebildet, GH wird aber jetzt durch die beiden Punkte

$$(s'' + s' - i - j, \alpha_i' + \alpha_j'') \quad \text{und} \quad (s'' + s' - i - j + 1, \alpha_i' + \alpha_j'')$$

abgebildet. Man sieht wie früher ein, daß nur der letzte dieser Punkte für das Polygon zu $f(x)$ $(p, \varphi(x))$ von Bedeutung ist. Man kann aber diesen Punkt in der Weise erhalten, daß man die Vektoren OG, OH und den Einheitsvektor von O bis $(1, 0)$ addiert. Eine Untersuchung, die mit der früheren analog ist, zeigt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Wenn $s' + s'' + 1 = s$ *ist, wird das Polygon von* $f(x)$ $(p, \varphi(x))$ *die Gerade* O *bis* $(1, 0)$ *enthalten und außerdem die Seiten der Polygone zu* $g(x)$ *und* $h(x)$ *nach steigender Neigung geordnet.*

§ 5.

Hauptpolygone.

Nach § 4 besteht also das Polygon eines Produktes $f(x) = g(x)\,h(x)$ aus den Polygonen von $g(x)$ und $h(x)$, indem die Seiten nach steigender Neigung geordnet werden, wozu die Gerade $O - (1, 0)$ kommen kann. Für die folgenden Untersuchungen sind nur die Teile der Polygone von Bedeutung, welche über der X-Achse liegen. Dieser Teil eines Polygons soll *Hauptpolygon* genannt werden. Man bemerkt dann:

Das Hauptpolygon für ein Produkt ist aus den Hauptpolygonen der Faktoren nach steigender Neigung zusammengesetzt.

Sei jetzt $f(x)$ ein beliebiges Polynom von der Form (1). Man kann dann immer für jeden Primzahlpotenzmodul p^α solche Polynome $Q_\alpha(x)$ und $\Phi_\alpha(x)$ bestimmen, daß

$$f(x) \equiv Q_\alpha(x)\,\Phi_\alpha(x) \pmod{p^\alpha}$$

wird, folglich ist

$$f(x) = Q_\alpha(x)\,\Phi_\alpha(x) + p^\alpha M(x), \tag{11}$$

wo $M(x)$ ein ganzzahliges Polynom von höchstens $(n-1)$-tem Grade ist, und

$$\Phi_\alpha(x) \equiv \varphi(x)^e \pmod{p}.$$

Ist jetzt (3) eine Entwicklung $(p, \varphi(x))$ für $f(x)$, so wird das zu $f(x)$ gehörige Polygon im Punkte (s, α_0) seinen Endpunkt haben. Man sieht daher, wenn man in (11) $\alpha > \alpha_0$ wählt, wird das Glied $p^\alpha M(x)$ ohne Bedeutung für das Polygon $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$. Das Polygon von $Q_\alpha(x)$ wird aus einer Geraden bestehen, welche mit der X-Achse zusammenfallen muß, und das Polygon zu $\Phi_\alpha(x)$ wird daher aus dem Hauptpolygone von $f(x)$ bestehen.

Wenn jetzt $\Phi_\alpha(x)$ für einen Modul p^α, $\alpha > \alpha_0$ reduzibel werden soll, müssen die Seiten des Polygons eines jeden Faktors aus Stücken des Hauptpolygons von $f(x)$ zusammengesetzt sein und dieselben Neigungen besitzen.

Sei die Neigung φ_r einer Seite S_r durch

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{h_r}{l_r} = \frac{\varkappa_r}{\lambda_r}$$

bestimmt, wo $\varkappa_r$ und λ_r keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Wenn h_r zu l_r relativ prim ist, gibt es außer den Eckpunkten von S_r keine Gitterpunkte auf dieser Seite. Wenn daher das Polygon eines Polynoms $\Psi(x)$ aus Stücken des Hauptpolygons von $f(x)$ zusammengesetzt sein soll, muß darin entweder S_r fehlen, oder das Polygon muß die ganze Seite enthalten.

Wenn dagegen h_r und l_r einen gemeinsamen Faktor δ_r haben, also

$$h_r = \delta_r \varkappa_r, \qquad l_r = \delta_r \lambda_r,$$

so werden auf S_r außer den Endpunkten $\delta_r - 1$ Gitterpunkte liegen. Ist die Abszisse des Anfangspunktes von S_r gleich x_r, so werden für

$$x = x_r, \quad x = x_r + \lambda_r, \quad x = x_r + 2\lambda_r, \ \ldots, \ x = x_r + \delta_r \lambda_r = x_{r+1}$$

Gitterpunkte auf S_r liegen und für keine anderen Abszissen. S_r kann daher in δ_r Stücke zerfallen, von welchen einige in dem Polygone von $\Psi(x)$ enthalten sein können.

Man sieht daraus die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Ist $f(x) \equiv Q(x)\varphi(x)^e \pmod{p}$, *und haben die Seiten* S_r $(r = 1, 2, \ldots, t)$ *des Hauptpolygons* $(p, \varphi(x))$ *von* $f(x)$ *Neigungen* φ_r, *die durch*

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{h_r}{l_r} = \frac{\delta_r \cdot \varkappa_r}{\delta_r \cdot \lambda_r} = \frac{\varkappa_r}{\lambda_r}$$

bestimmt sind, so kann $f(x)$ *nur dann einen Faktor*

$$g(x) \equiv \varphi(x)^i \pmod{p}$$

haben, wenn $g(x)$ vom Grade

$$q = m \cdot \sum_{r=1}^{t} \varepsilon_r \cdot \lambda_r$$

ist, wo m der Grad von $\varphi(x)$ und ε_r eine der Zahlen $0, 1, \ldots, \delta_r$ ist, wenn der größte gemeinsame Faktor von h_r und l_r mit δ_r bezeichnet wird.

Außerdem sieht man, daß $f(x) \pmod{p^\alpha}$ bei $\alpha > \alpha_0$ nur solche Faktoren $= \varphi(x)^i \pmod{p}$ haben kann, bei denen i von der Form

$$i = \sum_{r=1}^{t} \varepsilon_r \cdot \lambda_r$$

ist.

§ 6.

Irreduzibilitätskriterien.

Es sollen jetzt einige Bemerkungen über die Anwendung des vorstehenden Satzes gemacht werden. Es ist leicht zu sehen, daß in ihm alle früher genannten Sätze auf diesem Gebiete enthalten sind.

Wenn

$$f(x) \equiv \varphi(x)^t \pmod{p}$$

ist, wird das Polygon $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ ein Hauptpolygon. Man hat dann den Satz:

Wenn

$$f(x) \equiv \varphi(x)^t \pmod{p},$$

so kann $f(x)$ nicht mehr Faktoren haben als es Gitterpunkte auf dem Polygone $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ gibt. Bei der Berechnung zählt der Anfangspunkt nicht mit.

Aus diesem einfachen Satze folgt unmittelbar die Richtigkeit der Sätze von Schönemann, Eisenstein, Königsberger und Bauer, wenn man bemerkt, daß in diesen Fällen das Polygon eine Gerade wird.

Alle Fälle, wo das Polygon eine Gerade ist, sind in dem folgenden Satze enthalten:

Wenn

$$f(x) = a_0 \varphi(x)^n + a_1 Q_1(x) \varphi(x)^{n-1} + \ldots + a_n Q_n(x)$$

ist, und

$$a_1 = \alpha_1 p^{\frac{r}{n}}, \quad a_2 = \alpha_2 p^{\frac{2r}{n}}, \quad \ldots, \quad a_n = \alpha_r p^r, \quad [10])$$

wo a_0 und α_n nicht durch p teilbar sind, $Q_n(x) \not\equiv 0 \pmod{p}$, so wird $f(x)$ nur Faktoren von den Graden

$$t = m \cdot \frac{n}{e} \cdot \tau$$

haben können, wo e der größte gemeinsame Faktor von n und r ist, und τ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, e$. Wenn $e = 1$ ist, wird $f(x)$ irreduzibel.

Daraus folgt z. B.:

Wenn t und α einen größten gemeinsamen Faktor e haben, kann das Polynom

$$f(x) = \varphi(x)^t + p^\alpha M(x)$$

nur Faktoren von den Graden $m\frac{t}{e}\tau$ haben, wo τ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, e$ ist.

Dabei ist vorausgesetzt, daß $M(x)$ nicht $(\mathrm{mod}\, p)$ durch die Primfunktion $\varphi(x)\,(\mathrm{mod}\, p)$ teilbar ist und der Grad von $M(x)$ soll kleiner als $m \cdot t$ sein. Wenn t zu α relativ prim ist, wird $f(x)$ irreduzibel. Dies ist der Satz von Bauer.

Wenn in dem allgemeinen Satze $\varphi(x) = x$ gesetzt wird, also alle $Q_i(x)$ Konstanten werden, so erhält man die Resultate von Dumas.

In meiner früher erwähnten Arbeit habe ich auch gezeigt, wie es möglich ist, Irreduzibilitätssätze anderer Art aufzustellen. Es soll hier nur ein Beispiel gegeben werden; man hat den Satz:

Ein Polynom

$$f(x) = x^{rp} + a_1 x^{rp-1} + \ldots + a_{rp},$$

wo alle Koeffizienten, außer a_{rp} und $a_{r(p-1)}$, durch die Primzahl p teilbar sind, $a_{r(p-1)} \equiv -1\,(\mathrm{mod}\, p)$, kann nur Faktoren von einem Grade m haben, wo m durch p teilbar ist. Wenn $r \equiv 1$ ist, wird $f(x)$ irreduzibel.

Kristiania, Januar 1922.

[10]) Hier bedeutet das Symbol $\left\lceil i \right\rceil$ die kleinste ganze Zahl, welche $\geqq i$ ist.

(Eingegangen am 15. September 1922.)

Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen.

Von

A. Khintchine in Moskau.

§ 1.

Der Hauptsatz.

Es sei x irrational, $0 < x < 1$. Es bedeute $a_n(x)$ den n-ten Teilnenner der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung der Zahl x. Es sei ferner

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

E_A bedeute die Menge der Zahlen x, welche für jedes n der Bedingung

$$a_n(x) < [A n^{1+\varepsilon}]$$

Genüge leisten, wo $\varepsilon > 0$ von n unabhängig ist. Endlich bedeute $\Delta_{g_1, g_2, \ldots, g_s}$ das Intervall, dessen Punkte durch die Bedingungen

$$a_i(x) = g_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

charakterisiert werden, sowie auch die Länge des genannten Intervalls.

Satz[1]. *Für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes x mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße*[2] *Null ist bei wachsendem n*

$$A_n(x) = o(n^{1+\varepsilon}).$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ fest gegeben. Dann ist vor allem

$$\lim_{A \to \infty} \mathfrak{m} E_A = 1,$$[3]

[1]) Dieser Satz ist eine Ergänzung eines bekannten Satzes von Herrn F. Bernstein, Mathematische Annalen **71** (1912), S. 417; vgl. S. 430, Satz 4.

[2]) Im Lebesgueschen Sinne.

[3]) $\mathfrak{m} E$ bedeutet das Lebesguesche Maß der Menge E.

was leicht aus dem Beweise des soeben zitierten Satzes von Herrn F. Bernstein folgt. Es sei nun $\delta > 0$ beliebig klein gewählt, und A so groß, daß

$$\mathfrak{m} E_A > 1 - \delta.$$

Wir suchen nun eine obere Abschätzung für das Integral

$$\int_{E_A} a_n(x)\, dx.$$

Wenn $\frac{p_i}{q_i}$ den i-ten Näherungsbruch des endlichen regelmäßigen Kettenbruchs $(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$ bedeutet, so ist bekanntlich

$$d_{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g} = \frac{1}{q_{n-1}^2 \left(g + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)\left(g + 1 + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)},$$

$$d_{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}} = \frac{1}{q_{n-1}^2 \left(1 + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)},$$

und folglich

$$d_{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g} < \frac{2}{g^2}\, d_{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}}.$$

Wenn x dem Intervall $d_{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g}$ angehört, ist $a_n(x) = g$, also

$$\int_{d_{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g}} a_n(x)\, dx < \frac{2}{g}\, d_{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}}.$$

Diesen Ausdruck haben wir zunächst in bezug auf alle für die Menge E_A zulässigen Werte von $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ zu summieren. Infolge der letzten Ungleichung wird die Summe offenbar kleiner als

$$\frac{2}{g} \cdot \mathfrak{m} E_A < \frac{2}{g}.$$

Indem wir noch die letzte Summation inbezug auf g zwischen den Grenzen $g = 1$ und $g = [An^{1+\varepsilon}] - 1$ ausführen, erhalten wir

$$\int_{E_A} a_n(x)\, dx < B \lg n,$$

wo B von n unabhängig ist.

Nun setze ich

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Dann ergibt die letzte Ungleichung

$$\int_{E_A} S_n(x)\, dx < B \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg k}{k^{1+\varepsilon}} < C,$$

wo C von n unabhängig ist. Da $S_n(x)$ positiv ist und mit n beständig

zunimmt, so folgt aus den Anfangsgründen der Theorie des Lebesgueschen Integrals, daß $S_n(x)$ für jedes x der Menge E_A mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null in bezug auf n beschränkt ist, also

$$S_n(x) < C',$$

wo C' von x, aber nicht von n abhängt. Andererseits ist offenbar

$$A_n(x) < n^{1+\varepsilon} S_n(x),$$

folglich

$$A_n(x) < C' n^{1+\varepsilon}.$$

Diese Ungleichung ist für alle n erfüllt. Dabei bedeutet x einen beliebigen Punkt einer Menge, deren Maß größer als $1 - \delta$ ist. Wegen der Willkürlichkeit von δ ist somit der Satz bewiesen. Er kann ersichtlich verschärft werden; darauf lege ich hier keinen Wert. Übrigens kann die Abschätzung nicht auf $O(n)$ herabgedrückt werden, denn nach dem F. Bernsteinschen Hauptergebnis ist sogar die Beziehung

$$a_n(x) = O(n)$$

höchstens in einer Menge vom Maße Null erfüllt.

§ 2.

Anwendung auf einen Satz des Herrn Sierpiński.

Es sei wieder x irrational; ich setze

$$\varrho(x) = x - [x].$$

Herr Sierpiński[4]) hat bekanntlich bewiesen, daß für jedes irrationale x die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2} = o(n)$$

statthat.

Es entsteht nun die Frage, ob diese Abschätzung nicht verschärft werden kann. Diese Frage ist, soweit es sich um ein beliebiges x handelt, zu verneinen, was leicht ersichtlich ist und in genauer Weise durch folgenden Satz gerechtigt wird:

Satz 1. *Es sei $\varphi(n)$ eine beliebige positive Funktion des ganzzahligen Argumentes n, und*

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = 0.$$

[4]) Krakauer Anz., math.-nat. Kl. A, Jan. 1910, S. 9.

Dann gibt es ein irrationales x, welches die Relation

$$\sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2} = O(n\varphi(n))$$

nicht erfüllt.

Beweis. Bekanntlich ist für jeden irreduziblen Bruch $\frac{p}{q}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varrho\left(k\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Es sei $\frac{p_1}{q_1}$ ein positiver irreduzibler Bruch und n_1 so groß, daß

$$1) \quad \left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1} \varrho\left(k\frac{p_1}{q_1}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2q_1}\right| < \frac{1}{4q_1},$$

$$2) \quad \varphi(n_1) < \frac{1}{4q_1},$$

und folglich

$$\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1} \varrho\left(k\frac{p_1}{q_1}\right) - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4q_1} > \varphi(n_1)$$

ist.

Da die Funktion $\varrho(x)$ nach rechts stetig ist, muß die letzte Ungleichung richtig bleiben, wenn wir in ihrer linken Seite den Bruch $\frac{p_1}{q_1}$ durch eine beliebige Zahl x eines gewissen Intervalls, dessen linkes Ende $\frac{p_1}{q_1}$ ist, ersetzen. Dieses Intervall nennen wir δ_1; die ganze nächstfolgende Konstruktion verläuft innerhalb δ_1.

Es sei $\frac{p_2}{q_2}$ ein irreduzibler Bruch innerhalb δ_1, und $q_2 > q_1$. Ferner sei $n_2 > n_1$ so groß, daß

$$1) \quad \left|\frac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n_2} \varrho\left(k\frac{p_2}{q_2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2q_2}\right| < \frac{1}{4q_2},$$

$$2) \quad \varphi(n_2) < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4q_2},$$

und folglich

$$\left|\frac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n_2} \varrho\left(k\frac{p_2}{q_2}\right) - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4q_2} > 2\varphi(n_2)$$

ist.

Die letzte Ungleichung gilt wieder aus Stetigkeitsgründen nicht nur für $\frac{p_2}{q_2}$, sondern auch für jedes x eines bestimmten Intervalls δ_2, welches ganz innerhalb δ_1 liegt und dessen linkes Ende $\frac{p_2}{q_2}$ ist.

Wir setzen nun diese Konstruktion, deren erste zwei Schritte hier beschrieben sind, unbegrenzt fort. Wenn wir dabei (was selbstverständlich

erlaubt ist) das Intervall δ_i immer so klein wählen, daß es keinen Bruch mit einem Nenner $\leqq q_i$ enthält, so werden offenbar alle δ_i als einzigen gemeinsamen Punkt eine bestimmte Irrationalzahl x haben. Für diese Zahl haben wir dann nach ihrer Definition für $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left| \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \varrho(kx) - \frac{1}{2} \right| > i\, q_i(n_i),$$

womit Satz 1 bewiesen ist. —

Indessen kann, wenn wir auf eine Menge vom Maße Null verzichten, die Sierpińskische Relation sehr beträchtlich verschärft werden, wie folgende Behauptung zeigt.

Satz 2. *Für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null gilt die Abschätzung*

$$\sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2} = o(\lg^{1+\varepsilon} n).$$

Beweis. Es seien x und n gegeben, x sei irrational; ich entwickle x in einen regelmäßigen Kettenbruch, nenne $\frac{p_k}{q_k}$ den k-ten Näherungsbruch und behalte im übrigen die Bezeichnungen des § 1 bei. Die ganze Zahl i sei durch die Ungleichungen

$$q_i \leqq n < q_{i+1}$$

definiert, und es sei

$$n = q_i \cdot S_0 + R_0 \qquad (0 \leqq R_0 < q_i).$$

Bekanntlich ist

$$x = \frac{p_i}{q_i} + \frac{\theta}{q_i n}, \text{ mit } |\theta| < 1.$$

Es sei für $k = 1, 2, \ldots, n$

$$k p_i = s_k q_i + r_k \qquad (0 \leqq r_k < q_i).$$

Dann ist

$$\varrho(kx) = \varrho\left(s_k + \frac{r_k}{q_i} + \frac{k\theta}{q_i n}\right) = \varrho\left(\frac{r_k}{q_i} + \frac{k\,\theta}{q_i n}\right).$$

Wegen $r_k \leqq q_i - 1$, $k \leqq n$, $\theta < 1$, ist der Ausdruck

$$\frac{r_k}{q_i} + \frac{k\theta}{q_i n}$$

kleiner als 1. In den Fällen $r_k > 0$ und $r_k = 0$, $\theta > 0$ ist er auch > 0. Im Falle $r_k = 0$, $\theta < 0$ ist dagegen

$$-1 < \frac{r_k}{q_i} + \frac{k\theta}{q_i n} < 0.$$

Also ist

$$\varrho(kx) = \frac{r_k}{q_i} + \frac{k\theta}{q_i n} + 1 \text{ im Falle } r_k = 0,\ \theta < 0$$

und

$$\varrho(kx) = \frac{r_k}{q_i} + \frac{k\theta}{q_i n} \text{ in allen anderen Fällen.}$$

Wenn k ein volles Restsystem $\bmod q_i$ durchläuft, erhält r_k je einmal jeden der Werte $0, 1, 2, \ldots, q_i - 1$. Indem wir $c = 0$ oder 1 setzen, je nachdem $\theta > 0$ oder $\theta < 0$ ist, erhalten wir daher ($c' = 0$ oder 1 gesetzt)

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{q_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k\theta}{q_i n} + \sum_{\substack{k \leqq n \\ r_k = 0}} c - \frac{n}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{q_i} \sum_{k=1}^{S_0 q_i} r_k + \frac{1}{q_i} \sum_{k=S_0 q_i + 1}^{n} r_k + \frac{\theta}{q_i n} \sum_{k=1}^{n} k + S_0 c + c' - \frac{n}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{S_0}{q_i} \sum_{k=0}^{q_i - 1} k + \frac{1}{q_i} \sum_{k=1}^{R_0} r_k + \frac{\theta(n+1)}{2 q_i} + S_0 c + c' - \frac{n}{2} \right|$$

$$(1) \qquad = \left| \frac{S_0 q_i - S_0}{2} + \frac{1}{q_i} \sum_{k=1}^{R_0} r_k + \frac{\theta(n+1)}{2 q_i} + S_0 c + c' - \frac{S_0 q_i + R_0}{2} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{R_0} \frac{r_k}{q_i} - \frac{R_0}{2} + \frac{\theta(n+1)}{2 q_i} + S_0 \left(c - \frac{1}{2} \right) + c' \right|$$

$$\leqq \left| \sum_{k=1}^{R_0} \varrho(kx) - \frac{R_0}{2} \right| + \left| \sum_{k=1}^{R_0} - \frac{k\theta}{q_i n} \right| + \left| \frac{1}{2} S_0 - \frac{|\theta|(n+1)}{2 q_i} \right|$$

$$< \left| \sum_{k=1}^{R_0} \varrho(kx) - \frac{R_0}{2} \right| + 1 + \frac{1}{2} a_{i+1}(x) + \frac{1}{2},$$

denn es ist

$$S_0 \leqq \frac{n}{q_i} < \frac{q_{i+1}}{q_i} < a_{i+1}(x) + 1$$

und

$$\frac{n+1}{q_i} \leqq \frac{q_{i+1}}{q_i} < a_{i+1}(x) + 1.$$

Folglich erhalten wir

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2} \right| < \left| \sum_{k=1}^{R_0} \varrho(kx) - \frac{R_0}{2} \right| + \frac{1}{2} a_{i+1}(x) + \frac{3}{2}.$$

Wenn wir jetzt R_0 an Stelle von n setzen und die Zahl i_1 aus den Ungleichungen

$$q_{i_1} \leqq R_0 < q_{i_1 + 1}$$

bestimmen (wo also, infolge von $R_0 < q_i$, $i_1 < i$ zutreffen muß), so erhalten wir

$$\left|\sum_{k=1}^{R_0} \varrho(kx) - \frac{R_0}{2}\right| < \left|\sum_{k=1}^{R_1} \varrho(kx) - \frac{R_1}{2}\right| + \frac{1}{2} a_{i_1+1}(x) + \frac{3}{2},$$

mit

$$R_1 < q_{i_1+1}.$$

Indem wir diesen Prozeß weiter fortsetzen, müssen wir offenbar nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einem Ende kommen, nämlich, für ein bestimmtes ganzes t, $R_t = 0$ erhalten. Die letzte Relation wird dann die Gestalt haben

$$\left|\sum_{k=1}^{R_{t-1}} \varrho(kx) - \frac{R_{t-1}}{2}\right| < \frac{1}{2} a_{i_t+1}(x) + \frac{3}{2}.$$

Für $m = 1, 2, \ldots, t$ gilt $R_m < \frac{1}{2} R_{m-1}$, so daß $t < C \lg n$, wo C absolut konstant ist. Andererseits ist $i_m < i_{m-1}$. Wenn wir alle erhaltenen Relationen addieren, finden wir somit, indem wir noch $i = i_0$ setzen und selbstverständliche Abkürzungen einführen,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2}\right| < \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{t} a_{i_l+1}(x) + \frac{3}{2}(C \lg n + 1)$$

$$\leqq \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i+1} a_m(x) + C' \lg n = \frac{1}{2} A_{i+1}(x) + C' \lg n,$$

wo C' absolut konstant ist.

Endlich gibt es bekanntlich ein $\omega > 0$ so, daß

$$q_m > e^{\omega m} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist; folglich ist

$$i < \frac{1}{\omega} \lg q_i \leqq \frac{1}{\omega} \lg n.$$

Auf Grund des Satzes in § 1 erhalten wir daher für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2}\right| = o(i^{1+\varepsilon}) + O(\lg n) = o(\lg^{1+\varepsilon} n),$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

Auch hier kann ersichtlich die Abschätzung leicht verschärft werden, aber nicht allzusehr, wie sich aus folgender Behauptung ergibt, die eine wesentliche Ergänzung zum Satz 2 liefert.

Satz 3. *Es ist für jedes x mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2}\right| = \Omega(\lg n).\ ^{5})$$

Beweis. Nach dem zitierten Bernsteinschen Satz ist für jedes x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null

$$a_n(x) = O(n \lg^2 n)$$

und

$$a_n(x) = \Omega(n \lg n).$$

Es sei x eine Irrationalzahl, die beiden Bedingungen Genüge leistet, und es sei

$$a_n(x) < Bn \lg^2 n \quad \text{für} \quad n = 2, 3, \ldots,$$

wo B von n frei ist. $A > 0$ sei beliebig groß. Wir können dann die ganze Zahl i beliebig groß derart wählen, daß

$$a_{i+1}(x) > A(i+1)\lg(i+1)$$

wird. Es sei ferner s eine ganze Zahl mit

$$\frac{a_{i+1}(x)}{3} < s < \frac{a_{i+1}(x)}{2}.$$

Ich setze $n = sq_i$ und wende die Formel (1) an, wo $R_0 = 0$ zu setzen ist. Wir erhalten

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2}\right| = \left|\frac{\theta(n+1)}{2q_i} + s\left(c - \frac{1}{2}\right) + c'\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}s - \frac{|\theta|(n+1)}{2q_i} \pm c'\right| = \left|\frac{s}{2}\{1 - |\theta|\} - \frac{|\theta|}{2q_i} \pm c'\right|$$

$$> \frac{s}{2}(1 - |\theta|) - 2 > \frac{a_{i+1}(x)}{6}(1 - \theta) - 2 > \frac{A}{6}(i+1)\lg(i+1)(1 - |\theta|) - 2.$$

Andererseits ist

$$\frac{|\theta|}{q_i n} = \left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i q_{i+1}},$$

und folglich

$$|\theta| < \frac{n}{q_{i+1}} < \frac{sq_i}{a_{i+1}(x) \cdot q_i} = \frac{s}{a_{i+1}(x)} < \frac{1}{2};$$

daher finden wir

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2}\right| > \frac{A}{12}(i+1)\lg(i+1) - 2. \tag{2}$$

Nun ist bekanntlich

$$q_{i+1} < 2^i \prod_{j=1}^{i+1} a_j(x) < (2B)^i a_1(x) \prod_{j=2}^{i+1} j \lg^2 j,$$

[5]) Ω ist die Negation von O.

folglich

$$\lg q_{i+1} < k(i+1)\lg(i+1),$$

wo k von i frei ist. Daher finden wir

$$(i+1)\lg(i+1) > \frac{\lg q_{i+1}}{K} > \frac{\lg n}{K}.$$

Die Relation (2) gibt somit

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varrho(kx) - \frac{n}{2} \right| > AL \lg n,$$

wo L eine Konstante ist, die von x, aber nicht von n abhängt. Es sind dabei A und n beliebig groß, und x ist irgendein Punkt einer Menge, deren Komplement vom Maße Null ist. Somit ist Satz 3 bewiesen.

§ 3.

Anwendung auf ein Hardy-Littlewoodsches Problem.

Es bedeute $\delta = (\alpha, \beta)$ irgendein dem Gebiete $(0, 1)$ angehöriges Intervall sowie auch die Länge dieses Intervalls. Ferner sei $g(x)$ die charakteristische Funktion des Intervalls δ, so daß also $g(x) = 1$ innerhalb δ und $g(x) = 0$ außerhalb δ ist. Endlich setze ich

$$F(n, \delta, x) = \sum_{k=1}^{n} g(\varrho(kx)),$$

was einfacher

$$F(n, \delta, x) = \sum_{k=1}^{n} g(kx)$$

geschrieben werden kann, wenn wir, was jetzt dauernd geschehen soll, die Funktion $g(x)$ außerhalb der Strecke $(0, 1)$ durch die Forderung bestimmen, daß sie periodisch mit der Periode 1 sein soll. Es bedeutet also $F(n, \delta, x)$ die Anzahl derjenigen unter den Zahlen

$$\varrho(x), \varrho(2x), \ldots, \varrho(nx), \tag{3}$$

welche innerhalb δ liegen.

Es ist mir nicht bekannt, wer den ersten Beweis des grundlegenden Satzes erbracht hat, demzufolge für jedes irrationale x

$$F(n, \delta, x) - \delta n = o(n)$$

oder, was dasselbe besagt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(n, \delta, x)}{n} = \delta$$

ist. In den diesbezüglichen Arbeiten der Herren Hardy, Littlewood[6]) und Weyl[7]) wird dieses Gesetz als bekannt vorausgesetzt.

Was eine genauere Abschätzung anbetrifft, so ist eine solche sicher unmöglich, wenn wir sie für die Gesamtheit *aller* Irrationalzahlen verlangen. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man den Beweis des Satzes 1 in § 2 analogisiert. Die Herren Hardy und Littlewood behandeln die weitere Frage nach den Verschärfungen des in Rede stehenden Gesetzes unter Vernachlässigung eventueller Mengen vom Maße Null, ersetzen aber dabei die Reihe (3) durch die Partialreihe

$$\varrho(x) = \varrho(a^0 x),\ \varrho(a x),\ \varrho(a^2 x), \ldots, \varrho(a^{n-1} x),$$

wo a eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, und erhalten folgende sehr bemerkenswerte Abschätzungen, welche für alle x mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null gelten:

$$F(n, \delta, x) - \delta n = O(\sqrt{n \lg n})$$

$$F(n, \delta, x) - \delta n = \Omega\ (\sqrt{n}).^{8})$$

Das Ergebnis des § 1 ermöglicht uns nun zu zeigen, daß für den Fall der Reihe (3) eine viel genauere Abschätzung zutrifft, wie folgende Behauptung besagt:

Satz. *Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes x mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null ist*

$$F(n, \delta, x) - \delta n = o(\lg^{1+\varepsilon} n).$$

Beweis. Es seien n und x gegeben. Unter Beibehaltung aller Bezeichnungen der vorstehenden Paragraphen sei wieder die ganze Zahl i durch die Ungleichungen

$$q_i \leqq n < q_{i+1}$$

bestimmt, und

$$n = S_0 q_i + R_0 \qquad (0 \leqq R_0 < q_i).$$

Ferner definiere ich die natürlichen Zahlen s und t $(0 \leqq s \leqq t < q_i)$ durch die Relationen

$$(4) \qquad \frac{s}{q_i} \leqq \alpha < \frac{s+1}{q_i}, \qquad \frac{t}{q_i} < \beta \leqq \frac{t+1}{q_i},$$

so daß die Anzahl der Brüche der Gestalt $\frac{n}{q_i}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, q_i - 1)$ innerhalb δ gleich $t - s$ wird.

---

[6]) Acta Matematica 37 (1914).

[7]) Göttinger Nachrichten 1914.

[8]) Es ist leicht einzusehen, daß beide Abschätzungen auch für die Reihe $(1!\,x)$, $(2!\,x), \ldots, (n!\,x)$ gelten.

Die Relationen (4) geben

$$\beta q_i - \alpha q_i > t - s - 1,$$
$$\beta q_i - \alpha q_i \leqq t - s + 1,$$

und folglich

$$\delta q_i - 1 \leqq t - s < \delta q_i + 1.$$

Ich setze wie im § 2

$$x = \frac{p_i}{q_i} + \frac{\theta}{q_i n}, \qquad |\theta| < 1,$$

$$\varrho(kx) = \varrho\left(k\frac{p_i}{q_i} + \frac{k\theta}{q_i n}\right) = \varrho\left(\frac{rk}{q_i} + \frac{k\theta}{q_i n}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Es ist offenbar, wenn k ein volles Restsystem mod q_i durchläuft,

$$g(kx) = g\left(\frac{rk}{q_i}\right)$$

für alle Werte von k mit Ausnahme höchstens zweier, nämlich derjenigen, welche $r_k = s, t$ (im Falle $\theta > 0$) oder bzw. $r_k = s+1, t+1$ (im Falle $\theta < 0$) ergeben. Für einen dieser zwei Werte ist

$$g(kx) \leqq g\left(\frac{rk}{q_i}\right),$$

für den anderen

$$g(kx) \geqq g\left(\frac{rk}{q_i}\right).$$

Daher finden wir insbesondere für ganzes λ, bei $|\theta| \leqq 1$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{k=\lambda+1}^{\lambda+q_i} g(kx) = \sum_{k=1}^{q_i} g\left(\frac{k}{q_i}\right) + \theta_1 = t - s + \theta_1 = \delta q_i + \theta_2 + \theta_1.$$

Aus denselben Gründen erhalten wir andererseits

$$\sum_{k=S_0 q_i+1}^{n} g(kx) = \sum_{k=1}^{R_0} g\left(\frac{rk}{q_i}\right) + \theta_3 = \sum_{k=1}^{R_0} g(kx) + \theta_3 + \theta_4.$$

Wenn wir noch bemerken, daß

$$S_0 \leqq \frac{n}{q_i} < \frac{q_{i+1}}{q_i} < a_{i+1}(x) + 1$$

ist, erhalten wir somit

$$|F(n, \delta, x) - \delta n| = |\sum_{k=1}^{n} g(kx) - \delta n| = |\sum_{k=1}^{S_0 q_i} g(kx) + \sum_{k=S_0 q_i+1}^{n} g(kx) - \delta n|$$

$$= |S_0 \delta q_i + 2 S_0 \theta + \sum_{k=1}^{R_0} g(kx) + \theta_3 + \theta_4 - \delta S_0 q_i - \delta R_0|$$

$$\leqq |\sum_{k=1}^{R_0} g(kx) - \delta R_0| + 2 S_0 + 2 < |\sum_{k=1}^{R_0} g(kx) - \delta R_0| + 2 a_{i+1}(x) + 4.$$

Nachdem diese Relation bewiesen ist, wird der Rest des Beweises vollständig analog zum Schlusse des Beweises vom Satz 2 in § 2. Ich erlaube mir, diese Schlußkette nicht nochmals durchzuführen. Desgleichen lasse ich unerwähnt, daß der letzte Satz wohl verschärft, die Ordnung des Restgliedes aber nicht bis $\lg n$ herabgedrückt werden kann. Diese Fragen werden analog wie die entsprechenden in § 2 erledigt.

§ 4.

Über die Gitterpunkte in Polygonen.

Bekanntlich ist in den letzten Jahren die Aufgabe nach den Abschätzungen der Anzahl der Gitterpunkte in ebenen Bereichen durch die Arbeiten der Herren Landau und van der Corput sehr weit gefördert worden. Insbesondere ist es Herrn van der Corput gelungen, die bekannten Abschätzungsmethoden auf Bereiche anzuwenden, deren Randkurven von ziemlich allgemeiner Natur sind. Es ist jedoch bemerkenswert, daß gerade die geometrisch einfachsten, nämlich die geradlinig begrenzten Bereiche in dieser Hinsicht eine eigenartige Schwierigkeit darbieten und demgemäß ganz anders, wenn auch in mancher Beziehung auf einfachere Weise behandelt werden müssen. Es ist ja leicht verständlich, daß die arithmetischen Verhältnisse in Polygonen durch die Richtungen der Seiten bestimmt werden; diese Richtungen können aber, wie leicht zu vermuten ist, in arithmetischer Beziehung sehr verschiedenes Verhalten aufweisen. Daher liegt es in der Natur der Sache, daß die van der Corputschen Sätze von den Begrenzungskurven immer einen beschränkten Krümmungsradius verlangen, denn bei genügend schneller Veränderung der Richtung wird der Einfluß arithmetischer Eigenschaften einzelner Richtungen unmerkbar und kann außer acht gelassen werden.

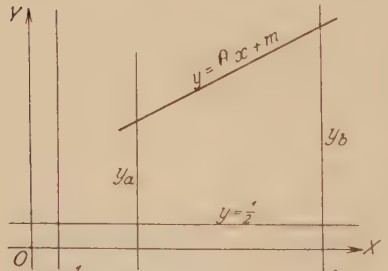

Fig. 1.

Die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen gestatten nun in die Frage nach der Anzahl der Gitterpunkte in Polygonen einiges Licht zu bringen.

Hilfssatz. *Es sei* $0 < a < b$, $a \equiv b \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$, θ *konstant,* m *beliebig. Es bedeute* G *das Trapez, welches von den vier Geraden* $y = \frac{1}{2}$, $x = a$, $y = b$, $y = \theta x + m$ *gebildet wird, wobei das Koordinatensystem* (x, y) *rechtwinklig vorausgesetzt ist.* $J(G)$ *bedeute den Inhalt von* G, $B(G)$ *die Anzahl der Gitterpunkte innerhalb dieses Gebietes* (Fig. 1).

Dann ist, bei veränderlichen a, b, m, für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes θ mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null,

$$B(G) - J(G) = O(\lg^{1+\varepsilon} b).$$

Beweis. Da eine ganzzahlige Vergrößerung von m die Differenz $B(G) - J(G)$ unverändert läßt, dürfen wir sogleich $y_a = \theta a + m > \frac{1}{2}$, $y_b = \theta b + m > \frac{1}{2}$ voraussetzen.

Offenbar ist

$$J(G) = \frac{1}{2}(b-a)(y_b + y_a - 1). \tag{5}$$

Andererseits ist

$$B(G) = \sum_{k=a}^{b} [\theta k + m] = \sum_{k=a}^{b} \{\theta k + m - \varrho(\theta k + m)\}$$

$$= \theta \left\{ \frac{\left(b - \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{1}{2}\right)}{2} - \frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right)}{2} \right\} + m(b-a) - \sum_{k=a}^{b} \varrho(\theta k + m).$$

Nun ist $\varrho(\theta k + m) = \varrho(\theta k) + \varrho(m)$ im Falle $\varrho(\theta k) < 1 - \varrho(m)$ und $\varrho(\theta k + m) = \varrho(\theta k) + \varrho(m) - 1$ im Falle $\varrho(\theta k) \geqq 1 - \varrho(m)$. Es wird also, wenn wir mit $N(t)$ die Anzahl der Werte von k unterhalb t bezeichnen, für welche

$$\varrho(\theta k) \geqq 1 - \varrho(m)$$

ausfällt,

$$J(G) = \frac{\theta}{2}(b^2 - a^2) + m(b-a) - \sum_{k=a}^{b} \varrho(\theta k) - (b-a)\varrho(m) + N(b) - N(a).$$

Nun ist erstens, nach dem Satz 2 des § 2,

$$\sum_{k=a}^{b} \varrho(\theta k) = \frac{b-a}{2} + O(\lg^{1+\varepsilon} b)$$

für alle θ, abgesehen von einer Menge vom Maße Null, und zweitens, nach dem Satze des § 3,

$$N(b) - N(a) = (b-a)\varrho(m) + O(\lg^{1+\varepsilon} b),$$

unter derselben Einschränkung über θ. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} B(G) &= \frac{\theta}{2}(b^2 - a^2) + \left(m - \frac{1}{2}\right)(b-a) + O(\lg^{1+\varepsilon} b) \\ &= \frac{b-a}{2}\{\theta b + m + \theta a + m - 1\} + O(\lg^{1+\varepsilon} b) \\ &= \frac{b-a}{2}(y_b + y_a - 1) + O(\lg^{1+\varepsilon} b), \end{aligned}$$

also wegen (5)

$$B(G) - J(G) = O(\lg^{1+\varepsilon} b),$$

w. z. b. w. Wir können jetzt die gesuchte Abschätzung der Anzahl der Gitterpunkte in beliebigen geschlossenen Polygonen in folgender Weise aussprechen.

Satz. *Es sei P ein ganz beliebiges geschlossenes Polygon in einer Ebene. Der Koordinatenursprung O werde in dieser Ebene beliebig, aber fest gewählt. Die Lage der rechtwinkligen Koordinatenachsen Ox, Oy sei durch den Richtungskoeffizienten α von Ox in bezug auf eine feste Richtung bestimmt. Endlich sei P_t das im Verhältnis $1:t$ von O aus dilatierte Polygon P. Dann ist, bei wachsendem t, für alle Werte von α mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null*

$$B(P_t) - J(P_t) = O(\lg^{1+\varepsilon} t)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis. Durch die vier Geraden $x = \pm \frac{1}{2}$, $y = \pm \frac{1}{2}$ wird P_t im allgemeinen in neun Teile zerlegt. Für die fünf Teile, welche innerhalb des durch die soeben genannten Geraden bestimmten Kreuzes liegen, ist, wie leicht ersichtlich, $B - J = O(1)$. Es bleiben also nur die vier evtl. übrigbleibenden Teile zu untersuchen, und aus Symmetriegründen genügt es den einen, durch $x > \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$ bestimmten Teil ins Auge zu fassen. Dieser Teil heiße G_t. Durch jeden Eckpunkt von P_t, welcher innerhalb G_t liegt, lege man eine Parallele zur y-Achse. Dadurch wird G_t in eine gewisse (von t unabhängige) Anzahl von Trapezen zerlegt, die

$$G'_{t,1}, G'_{t,2}, \ldots, G'_{t,k}$$

heißen mögen, und deren jedes $G'_{t,i}$ von vier Geraden $y = \frac{1}{2}$, $x = a'_i$, $x = b'_i$, $y = \theta_i x + m_i$ begrenzt ist, so daß

$$J(G_t) = \sum_{i=1}^{k}{}' \pm J(G'_{t,i}),$$

$$B(G_t) = \sum_{i=1}^{k}{}' \pm B(G'_{t,i})$$

ist[9]). Nun seien a_i, b_i die durch die Relationen

$$a_i \equiv b_i \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$$

$$-\frac{1}{2} \leqq a'_i - a_i < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leqq b'_i - b_i < \frac{1}{2}$$

eindeutig bestimmten Zahlen. Es sei $G_{t,i}$ das von den Geraden $y = \frac{1}{2}$,

[9]) Einige dieser Trapeze können zu rechtwinkligen Dreiecken werden.

$x = a_i$, $x = b_i$, $y = \theta_i x + m_i$ begrenzte Trapez. Dann findet man in leicht ersichtlicher Weise

$$\sum_{i=1}^{k} \pm J(G'_{t,i}) - \sum_{i=1}^{k} \pm J(G_{t,i}) = O(1),$$

$$\sum_{i=1}^{k} \pm B(G'_{t,i}) - \sum_{i=1}^{k} \pm B(G_{t,i}) = O(1),$$

und folglich

$$B(G_t) - J(G_t) = \sum_{i=1}^{k} \pm \{B(G_{t,i}) - J(G_{t,i})\} + O(1).$$

Nun ist jedes $G_{t,i}$ offenbar ein Trapez gemäß den Voraussetzungen des zuletzt bewiesenen Hilfssatzes. Wir wählen jetzt α derart, daß alle θ_i Werte erhalten, für welche die Abschätzung des Hilfssatzes in Geltung kommt[10]). Dann ist

$$B(G_{t,i}) - J(G_{t,i}) = O(\lg^{1+\varepsilon} b_i) = O(\lg^{1+\varepsilon} t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

und folglich

$$B(G_t) - J(G_t) = O(\lg^{1+\varepsilon} t),$$

womit der Satz bewiesen ist.

§ 5.

Ein neues Problem.

Es sei E eine im Jordanschen Sinne meßbare, im Intervall $(0, 1)$ gelegene Punktmenge, $g(x)$ ihre charakteristische Funktion (also $g(x) = 1$, wenn x der Menge E angehört, $g(x) = 0$ anderenfalls), welche wir wieder auch außerhalb der Strecke $(0, 1)$ durch die übliche Periodizitätsbedingung definiert denken. Aus den analogen Relationen für den Fall, daß E ein Intervall ist, schließt man dann leicht auch für den allgemeinen Fall, daß für jedes irrationale x

$$\sum_{k=1}^{n} g(kx) - n\,\mathfrak{m}\,E = o(n), \tag{6}$$

oder, was dasselbe aussagt,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} g(kx)}{n} = \mathfrak{m}E. \tag{7}$$

Ist nun die Menge E nur im weiteren Lebesgueschen Sinne meßbar, so

[10]) Dieser Forderung genügen offenbar alle Werte von α mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null.

gelten im allgemeinen die Relationen (6), (7) nicht mehr für jedes irrationale x, wovon man sich ganz leicht überzeugt. Es entsteht nun die für die Funktionentheorie sehr wichtige Frage, ob nicht in diesem Falle die Beziehungen (6), (7) *für alle x mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null* gelten. Wird die Frage bejaht, so erhält man vor allem eine Definition des Maßes und des Integrals, welche von arithmetischer Natur ist und in mancherlei Hinsicht Interesse bietet. Andererseits scheinen einige Konvergenzfragen für Fouriersche Reihen mit dem bezeichneten Problem in einem gewissen Zusammenhange zu stehen.

Zunächst reduziert sich das Problem leicht auf den Fall, wo die Menge E die Vereinigung einer abzählbaren Menge von Intervallen ohne gemeinsame Punkte ist. Aber auch in dieser einfacheren Gestalt scheint die Frage noch manche Schwierigkeit zu bieten.

Die Ergebnisse des § 3 erlauben nun das gestellte Problem für eine sehr beträchtliche Klasse von Einzelfällen im bejahenden Sinne zu beantworten.

Hilfssatz. *Es sei*

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

eine Folge von im Lebesgueschen Sinne meßbaren Mengen, und

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$$

die Folge ihrer charakteristischen Funktionen;

$$k_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$$

bedeutet also die Anzahl derer unter den Mengen

$$E_1, E_2, \ldots, E_n,$$

welchen der Punkt x angehört. Es sei ferner $\psi(n)$ eine Funktion des ganzzahligen Argumentes n, $\psi(n+1) > \psi(n) > 0$ und die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{m}\, E_i}{\psi(i)}$$

konvergent. Dann ist für alle x mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null

$$k_n(x) = O(\psi(n)).$$

Beweis. Der Einfachheit halber nehmen wir an, alle gegebenen Mengen seien im Intervall $(0, 1)$ gelegen. Dann finden wir

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i(x)}{\psi(i)}\, dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\psi(i)} \int_0^1 g_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{m}\, E_i}{\psi(i)} = O(1),$$

wo sich die Abschätzung auf wachsendes n bezieht. Da

$$\frac{g_i(x)}{\psi(i)} \leqq 0$$

ist, schließen wir daher, daß die Reihe

$$\sum_{i=1}^{x} \frac{g_i(x)}{\psi(i)}$$

für jedes x des Intervalls $(0, 1)$ mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null konvergiert. Für einen Konvergenzpunkt α dieser Reihe ist aber

$$k_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \leqq \psi(n) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i(x)}{\psi(i)} = O(\psi(n)),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Nun sei E ein System von Intervallen, welche paarweise keine gemeinsamen Punkte haben, in unendlicher Anzahl vorhanden und im Intervall $(0, 1)$ gelegen sind. Ich bezeichne diese Intervalle, sowie auch ihre Längen, in irgendeiner festen Reihenfolge mit

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots.$$

Ich setze ferner

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_i, \qquad R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \delta_i.$$

Das System E soll *regulär* genannt werden, wenn in bezug auf dieses System für jedes x mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null die Relationen (6), (7) gelten.

Die Ergebnisse des § 3 gestatten dann, folgende Behauptung zu beweisen:

Satz. *Das System E ist immer regulär, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, daß*

$$R_n = O\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\right)$$

ist. Insbesondere ist also das System E regulär, wenn für ein $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$$

gilt.

Beweis. Ich setze für $n = 2, 3, \ldots$

$$A(n) = \frac{n}{\lg^2 n}$$

und bemerke, daß wegen des Satzes des § 3 für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null

$$|F(n, \delta_i, x) - \delta_i n| < B \lg^{\frac{3}{2}} n$$

ist, wo B von x, aber weder von n noch von i abhängt.

Deshalb ist

$$|F(n, S_{A(n)}, x) - S_{A(n)} \cdot n| < B \cdot A(n) \lg^{\frac{3}{2}} n = o(n). \tag{8}$$

Andererseits sei E_k die Menge der Zahlen x, für welche $\varrho(kx)$ in $R_{A(k)}$ enthalten ist; ich bezeichne ferner mit $h_n(x)$ die Anzahl derer unter den Mengen

$$E_1, E_2, \ldots, E_n,$$

welchen x angehört. Dann ist

$$F(n, R_{A(n)}, x) \leqq h_n(x),$$

denn, falls $\varrho(ix)$ in $R_{A(n)}$ enthalten ist, ist für $i \leqq n$ $\varrho(ix)$ a fortiori in $R_{A(i)}$, folglich x in E_i enthalten.

Nun ist, wie leicht ersichtlich,

$$\mathfrak{m} E_k = \mathfrak{m} R_{A(k)} = O\left(\frac{1}{\{A(k)\}^\varepsilon}\right) = O\left(\frac{\lg^{2\varepsilon} k}{k^\varepsilon}\right),$$

also die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{m} E_k}{k^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

konvergent. Dann zeigt aber der bewiesene Hilfssatz, daß

$$F(n, R_{A(n)}, x) \leqq h_n(x) = O(n^{1-\frac{\varepsilon}{2}}) = o(n) \tag{9}$$

ist. Aus (8) und (9) erhalten wir

$$|F(n, E, x) - n \cdot \mathfrak{m} E| \leqq |F(n, S_{A(n)}, x) - n S_{A(n)}| + F(n, R_{A(n)}, x) + n \cdot R_{A(n)} = o(n) + o(n) + o(n) = o(n),$$

womit wegen

$$F(n, E, x) = \sum_{k=1}^{n} g(kx)$$

der Satz bewiesen ist[11].

Iwanovo-Wosniesensk, Juni 1922.

[11]) Am Schlusse ihrer zitierten Arbeit sprechen die Herren Hardy und Littlewood von einigen neuen Untersuchungen, die ihrem Inhalte nach den hier behandelten sehr nahe zu stehen scheinen. Leider bin ich nicht in der Lage festzustellen, ob von diesen Untersuchungen etwas veröffentlicht worden ist.

(Eingegangen am 12. Dezember 1922.)

Integrationslose Berechnung invarianter Bogen- und Flächenelemente ebener Transformationsgruppen.

Von

Gerhard Kowalewski in Dresden.

Wenn eine r-gliedrige Transformationsgruppe $\mathfrak{G}_r$ die Elemente $(r-2)$-ter Ordnung der Ebene transitiv vertauscht, so gibt es bei ihr ein *invariantes Flächenelement*, d. h. einen invarianten Ausdruck von der Form

$$\Omega(x, y, y_1, \ldots, y_{r-2})\, dx\, dy, \tag{1}$$

wobei $y_1, \ldots, y_{r-2}$ die $r-2$ ersten Ableitungen von y nach x bezeichnen, so daß also $x, y, y_1, \ldots, y_{r-2}$ die Koordinaten eines Kurvenelements $(r-2)$-ter Ordnung darstellen. Das invariante Flächenelement ist nichts anderes als eine simultane Invariante eines solchen Kurvenelements und eines den Punkt dieses Elements umgebenden infinitesimalen Gebietes γ. Von der Existenz einer solchen Invariante kann man sich durch folgende einfache Betrachtung überzeugen. Es seien

$$\left\{\begin{aligned} x' &= F(x, y, a_1, \ldots, a_r), \\ y' &= G(x, y, a_1, \ldots, a_r), \\ y_1' &= \frac{dG}{dF} = G_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{r-2}' &= \frac{dG_{r-3}}{dF} = G_{r-2} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

die endlichen Gleichungen der $(r-2)$-mal erweiterten Gruppe $\mathfrak{G}_r$. Sie geben an, wie die Elemente $(r-2)$-ter Ordnung e_{r-2} durch die Gruppe transformiert werden. Da wir annehmen, daß die so erweiterte Gruppe transitiv ist, so lassen sich die Gleichungen (2) nach den Parametern auf-

lösen, so daß $a_1, \ldots, a_r$ durch e_{r-2} und e'_{r-2} ausgedrückt erscheinen. Setzen wir diese Ausdrücke in

$$\gamma' = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}\right)\gamma, \tag{3}$$

die Transformationsformel des Gebietes γ, ein, so ergibt sich

$$\gamma' = \varphi(e_{r-2}, e'_{r-2})\,\gamma. \tag{4}$$

Das ist nun eine Beziehung, die erhalten bleibt, wenn man mittels einer Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}_r$ von e_{r-2} und γ zu $\bar{e}_{r-2}$ und $\bar{\gamma}$ übergeht. Wegen der Gruppeneigenschaft hängen dann nämlich $\bar{e}_{r-2}$ und $\bar{\gamma}$ auch mit e'_{r-2} und γ' durch eine Transformation von $\mathfrak{G}_r$ zusammen, so daß die Gleichungen (2) und (3) richtig bleiben, wenn man e_{r-2} und γ durch $\bar{e}_{r-2}$ und γ ersetzt, zugleich aber auch den Parametern a gewisse neue Werte $\bar{a}$ beilegt. Da nun die Relation (4) aus (2) und (3) durch Elimination der Parameter entsteht, so wird auch sie bei Überstreichung von e_{r-2} und γ richtig bleiben. Es wird also die Gleichung gelten

$$\varphi(e_{r-2}, e'_{r-2})\,\gamma = \varphi(\bar{e}_{r-2}, e'_{r-2})\,\bar{\gamma}.$$

Denkt man sich e'_{r-2} als fest, so stellt $\varphi \cdot \gamma$ die simultane Invariante von e_{r-2} und γ dar, deren Existenz wir nachweisen wollten. Schreibt man $dx\,dy$ statt γ, so nimmt sie die Form (1) an.

In ganz ähnlicher Weise überzeugt man sich, wenn $r > 2$ ist, von der Existenz eines *invarianten Bogenelements*, d. h. eines invarianten Ausdrucks der Form

$$\omega(x, y, y_1, \ldots, y_{r-2})\,dx. \tag{5}$$

An die Stelle von (3) tritt dabei eine der Gleichungen

$$dx' = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + y_1\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx, \qquad dy' = \left(\frac{\partial G}{\partial x} + y_1\frac{\partial G}{\partial y}\right)dx.$$

Lie hat sich bei verschiedenen Gelegenheiten mit invarianten Bogen- und Flächenelementen beschäftigt. Auch in seinen Seminarübungen benutzte er sie gern zur Erläuterung des Invariantenbegriffs und zeigte, wie man sie aus den infinitesimalen Transformationen der Gruppe *durch Quadraturen* berechnen kann. Erst vor kurzem hat Herr Engel für drei wichtige Gruppentypen gezeigt, daß sich die invarianten Bogen- und Flächenelemente, ja sogar die Differentialinvarianten, ohne Integration aus den Definitionsgleichungen finden lassen (Leipz. Berichte, Mai 1922). Mit ganz andern Hilfsmitteln werde ich im folgenden eine Klasse von Gruppen behandeln, bei denen wenigstens die Bestimmung der invarianten Bogen- und Flächenelemente aus den infinitesimalen Transformationen integrationslos vor sich geht. Die Methode ist auch dann noch anwendbar, wenn nur die Definitionsgleichungen vorliegen.

$Hf = \xi p + \eta q$ möge die r infinitesimalen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_r$ repräsentieren. Dann gelten für das invariante Flächenelement (1) die Differentialgleichungen

$$(6)\quad \xi \frac{\partial \log \Omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \log \Omega}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial \log \Omega}{\partial y_1} + \dots + \eta_{r-2} \frac{\partial \log \Omega}{\partial y_{r-2}} + \xi_x + \eta_y = 0,$$

während das invariante Bogenelement (5) den Differentialgleichungen

$$(7)\quad \xi \frac{\partial \log \omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \log \omega}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial \log \omega}{\partial y_1} + \dots + \eta_{r-2} \frac{\partial \log \omega}{\partial y_{r-2}} + \xi_x + y_1 \xi_y = 0$$

genügt. Hierbei haben $\eta_1, \dots, \eta_{r-2}$ folgende Bedeutung:

$$\eta_\nu = \frac{d^\nu (\eta - y_1 \xi)}{dx^\nu} + \xi y_{\nu+1},$$

woraus sich die für $\nu = 1, 2, \dots$ geltende Relation

$$(8)\quad \frac{\partial \eta_\nu}{\partial y_\nu} = \xi_x + \eta_y - (\nu + 1)(\xi_x + y_1 \xi_y)$$

ergibt, ein wichtiges Hilfsmittel unserer Überlegungen.

Wegen des Nichtverschwindens der Determinante

$$\xi, \eta, \eta_1, \dots, \eta_{r-2}$$

das mit der zu Anfang eingeführten Transitivitätsbedingung zusammenhängt, lassen sich die Systeme (6) und (7) nach den Ableitungen von $\log \Omega$ und $\log \omega$ auflösen, so daß diese als bekannt zu betrachten sind.

Wir wollen nun annehmen, daß Ω nicht nur von x, y allein abhängt, sondern auch mit $y_1, \dots$ behaftet ist, etwa bis zu y_σ. Dann ergeben sich durch Differentiation der Gleichungen (6) nach y_σ für $F = \frac{\partial \log \Omega}{\partial y_\sigma}$ folgende Differentialgleichungen:

$$\xi \frac{\partial \log F}{\partial x} + \eta \frac{\partial \log F}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial \log F}{\partial y_1} + \dots + \eta_{r-2} \frac{\partial \log F}{\partial y_{r-2}} + \xi_x + \eta_y - (\sigma + 1)(\xi_x + y_1 \xi_y) = 0.$$

Dieselben Differentialgleichungen werden aber durch $F = \Omega \omega^{-\sigma-1}$ erfüllt, so daß

$$(9)\quad \frac{\partial \log \Omega}{\partial y_\sigma} = C \Omega \omega^{-\sigma-1}$$

sein muß, wobei C eine Konstante bedeutet.

Diese bemerkenswerte Relation zeigt, *daß man aus Ω sofort auch ω findet, sobald Ω irgendeine Ableitung von y enthält, sobald also die Gruppe $\mathfrak{G}_r$ nicht mit einer flächentreuen ähnlich ist.*

Wir wollen jetzt die weitere Annahme machen, daß ω nicht nur von x, y, y_1 abhängt, sondern mit $y_2, \dots$ behaftet ist, etwa bis zu y_ϱ. Dann

erhält man aus den Gleichungen (7) durch Differentiation nach y_ϱ für $f = \frac{\partial \log \omega}{\partial y_\varrho}$ folgende Differentialgleichungen:

$$\xi \frac{\partial \log f}{\partial x} + \eta \frac{\partial \log f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial \log f}{\partial y_1} + \ldots + \eta_{\tau-2} \frac{\partial \log f}{\partial y_{\tau-2}} + \xi_x + \eta_y - (\varrho+1)(\xi_x + y_1 \xi_y) = 0.$$

Da ihnen auch durch $f = \Omega \omega^{-\varrho-1}$ Genüge geschieht, so muß

$$\frac{\partial \log \omega}{\partial y_\varrho} = c \Omega \omega^{-\varrho-1} \tag{10}$$

sein, wo c wiederum eine Konstante bedeutet.

Mittels dieser Relation *kann man aus ω sofort Ω finden, sobald ω eine höhere Ableitung als die erste enthält.* Die Relationen (9) und (10) lassen sich aber in viel weiter gehender Weise verwerten.

Zunächst ist zu bemerken, daß $\varrho = \sigma$ sein muß, wenn die beiden über Ω und ω gemachten Annahmen erfüllt sind. In der Tat folgt aus (9), daß ω nicht von höherer Ordnung sein kann als Ω, und aus (10) das Umgekehrte. *Sobald also das invariante Bogenelement von höherer als erster, das invariante Flächenelement aber nicht von nullter Ordnung ist, müssen beide dieselbe Ordnung haben,* und die Gleichungen (9) und (10) lassen sich in folgende Doppelgleichung zusammenfassen:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \log \omega}{\partial y_\varrho} = \frac{1}{C} \frac{\partial \log \Omega}{\partial y_\varrho} = \Omega \omega^{-\varrho-1}. \tag{11}$$

Man entnimmt hieraus

$$\frac{\partial \log (\Omega \omega^{-k})}{\partial y_\varrho} = 0, \tag{12}$$

wobei $k = C : c$ gesetzt worden ist. k ist als bekannt anzusehen, weil man es durch Division der bekannten Größen $\frac{\partial \log \Omega}{\partial y_\varrho}$ und $\frac{\partial \log \omega}{\partial y_\varrho}$ findet.

Nun wollen wir die dritte Annahme einführen, daß $\Omega \omega^{-k}$ nicht etwa von nullter oder erster Ordnung, sondern mit $y_2, \ldots$ behaftet ist, etwa bis y_τ $(\tau > \varrho)$. Dann ergibt sich aus den für $\Omega \omega^{-k}$ geltenden Differentialgleichungen

$$\xi \frac{\partial \log (\Omega \omega^{-k})}{\partial x} + \eta \frac{\partial \log (\Omega \omega^{-k})}{\partial y} + \ldots + \eta_{\tau-2} \frac{\partial \log (\Omega \omega^{-k})}{\partial y_{\tau-2}} + \xi_x + \eta_y - k(\xi_x + y_1 \xi_y) = 0 \tag{13}$$

durch Differentiation nach y_τ folgendes auf $W = \frac{\partial \log (\Omega \omega^{-k})}{\partial y_\tau}$ bezügliche System:

$$\xi \frac{\partial \log W}{\partial x} + \eta \frac{\partial \log W}{\partial y} + \ldots + \eta_{\tau-2} \frac{\partial \log W}{\partial y_{\tau-2}} + \xi_x + \eta_y - (\tau+1)(\xi_x + y_1 \xi_y) = 0, \tag{14}$$

das zugleich durch $W = \Omega\,\omega^{-\tau-1}$ befriedigt wird. Man kann also schließen

$$\frac{\partial \log (\Omega\,\omega^{-k})}{\partial y_\tau} = K\,\Omega\,\omega^{-\tau-1}, \tag{15}$$

wo K eine Konstante bezeichnet. Die linke Seite der Gleichung (15) ist eine bekannte Größe, weil die Ableitungen von $\log \Omega$ und $\log \omega$ solche sind. Halten wir nun die Relationen (10) und (15) zusammen und bedenken, daß $\tau < \varrho$ ist, so liegt auf der Hand, daß sich Ω und ω ohne jede Integration angeben lassen. Um die definitiven Formeln in möglichst einfacher Gestalt zu erhalten, können wir noch Ω und ω derart mit konstanten Faktoren versehen, daß c und K beide gleich 1 werden. Dann ergeben sich aus (10) und (15) für Ω und ω die Ausdrücke

$$\omega = \left(\frac{\dfrac{\partial \log (\Omega\,\omega^{-k})}{\partial y_\tau}}{\dfrac{\partial \log \omega}{\partial y_\varrho}} \right)^{\frac{1}{\varrho-\tau}}, \qquad \Omega = \frac{\left(\dfrac{\partial \log (\Omega\,\omega^{-k})}{\partial y_\tau}\right)^{\frac{\varrho+1}{\varrho-\tau}}}{\left(\dfrac{\partial \log \omega}{\partial y_\varrho}\right)^{\frac{\tau+1}{\varrho-\tau}}}. \tag{16}$$

Daraus, daß $\Omega\omega^{-k}$ und $\Omega\omega^{-\tau-1}$ frei von y_ϱ sind, während Ω und ω beide y_ϱ enthalten, folgt übrigens, *daß* $k = \tau + 1$ *sein muß*. Die Formeln (16) lassen sich leicht in explizite Determinantenausdrücke umschreiben.

Was die Berechnung der Differentialinvarianten anbetrifft, so kann nach einem Satze von mir die niedrigste Differentialinvariante in der Form $\alpha(e_{r-2}) + \beta(e_{r-2})\,y_{r-1}$ angenommen werden, und es ist dann $\beta = \Omega\,\omega^{-r}$, so daß nur noch α zu bestimmen bleibt, was eine Quadratur erfordert. Durch Heranziehung gemischter oder relativer invarianter Bogen- und Flächenelemente läßt sich diese Quadratur unter Umständen ersparen, wie ich bei anderer Gelegenheit darlegen werde.

(Eingegangen am 17. Februar 1923.)

Die isometrische Verbiegung einer Fläche durch schrittweise Näherung.

Von

M. Lagally in Dresden.

§ 1.

Einleitung.

Die Aufgabe, die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche durch Reihenentwicklungen zu bestimmen, deren einzelne Glieder durch ein rekurrierendes Verfahren erhalten werden, ist neuerdings durch H. Liebmann[1]) in erfolgreicher Weise behandelt worden. Liebmann geht von der Bourschen Gleichung zweiter Ordnung zweiten Grades aus, deren Integration *eine* Koordinate der gesuchten Biegungsfläche liefert, aus der die beiden anderen in bekannter Weise durch Quadraturen zu bestimmen sind, und zerlegt sie in eine unendliche Folge von unhomogenen linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sämtlich zur selben verkürzten Gleichung gehören; die Bestimmung der rechten Seite einer jeder dieser Gleichungen erfordert die Integration sämtlicher vorhergehender. Die Liebmannsche Methode scheint unerreichbar an Kürze und Einfachheit der Anwendung auf spezielle Beispiele, allerdings auf Kosten der Symmetrie der allgemeinen Formeln.

Eine solche Symmetrie gibt für die erste Stufe der Verbiegung Weingartens bekannte Einführung einer charakteristischen Funktion und Gleichung; die zweite Stufe hat der Verfasser in analoger Weise namentlich nach der formentheoretischen Seite hin behandelt[2]). In der folgenden Untersuchung ist die Methode der charakteristischen Gleichung zur Bestimmung der Reihenglieder beliebig hoher Ordnung verwendet. Die

[1]) Liebmann, Bedingte Flächenverbiegungen, insb. Gleitverbiegungen. Sitzungsber. der bayr. Akad. d. Wissensch. 1920, S. 21 u. f.

[2]) Lagally, Über unendlich kleine isometrische Verbiegungen einer Fläche mit höherer als erster Näherung. Math. Ann. 76 (1914), S. 105 u. ff.

sämtlichen charakteristischen Gleichungen, die von vornherein linear sind, unterscheiden sich nur durch die rechten Seiten. Diese sind durch eine Rekursionsformel für die Koeffizienten einer mit dem Biegungsproblem verbundenen quadratischen Differentialform zu bestimmen, welche in den gesuchten Größen linear, in den bereits bekannten quadratisch ist und hierin den Zusammenhang mit der ursprünglich quadratischen Bourschen Gleichung erkennen läßt.

Für die Integration der unhomogenen charakteristischen Gleichungen höherer Stufe ist neben der Kenntnis des allgemeinen Integrals der ursprünglichen Weingartenschen charakteristischen Gleichung die Aufsuchung eines partikulären Integrals von nöten. Dieses ist in formaler Weise durch Quadraturen zu erhalten, wenn die Integration der verkürzten Gleichung selbst auf diesem Wege durch Anwendung der Laplaceschen Transformation möglich ist. D. h. in allen Fällen, in denen das Problem der unendlich kleinen Verbiegungen einer Fläche durch Quadraturen vollständig gelöst werden kann, ist die Auffindung ihrer sämtlichen stetigen Folgen von endlichen Verbiegungen bis zu beliebig hoher Stufe der Annäherung lediglich eine Rechenaufgabe. Das gilt z. B. für den wichtigen Fall der Kugel.

§ 2.

Die Stufen der Verbiegung.

Zu einer gegebenen Fläche $F(x, y, z)$ (Ausgangsfläche) soll eine stetige Reihe von ∞^1 Biegungsflächen $F^*(x^*, y^*, z^*)$ bestimmt werden in der Form

$$x^* = x + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^k x_k + \ldots; \quad \text{ebenso} \quad y^*, z^*;$$

und zwar durch schrittweises Aufsuchen der Zusatzkoordinaten x_1, y_1, z_1, $x_2, y_2, z_2, \ldots$. Entwickelt man das Linienelement der Biegungsfläche in eine nach Potenzen von ε fortschreitende Reihe

$$ds^{*2} = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \ldots + \varepsilon^k \alpha_k + \ldots,$$

wo die Größen α_k quadratische Differentialformen bedeuten, so muß $ds^{*2} = ds^2$ sein, also die α_k mit Ausnahme von α_0 verschwinden. Die bei der Bestimmung der Reihe für x^* auftretenden Konvergenzfragen kann man umgehen, indem man sich zunächst wenigstens überhaupt auf Deformationen endlicher Stufe beschränkt. Da α_k nur die Koordinaten von F und die Zusatzkoordinaten bis zur k-ten Stufe x_k, y_k, z_k einschließlich enthält, kann man eine deformierte Fläche k-ter Stufe $F^{(k)}$ definieren:

(a) $$x^{(k)} = x + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^k x_k; \quad \text{ebenso} \quad y^{(k)}, z^{(k)},$$

deren Linienelement $ds^{(k)2}$ mit dem von F bis auf Größen k-ter Ordnung

in ε einschließlich übereinstimmt; die folgenden Glieder stehen unter dem Einfluß weiterer Zusatzkoordinaten $x_{k+1}, \ldots$, welche bei Erhöhung der Stufenzahl der Deformation hinzutreten. Setzt man

$$(1) \qquad ds^{(k)2} = ds^2,$$

so gilt diese Gleichung bis zu Gliedern mit ε^k einschließlich; sie soll als Bedingung der Isometrie k-ter Stufe bezeichnet werden.

Es sollen nun durch Zusammenfügen der Ortsvektoren von F und $F^{(k)}$ zwei weitere Flächen gebildet werden, eine Summenfläche $S^{(k)}(\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)}, \bar{z}^{(k)})$ und eine Differenzenfläche $O^{(k)}(\xi^{(k)}, \eta^{(k)}, \zeta^{(k)})$ mit den Koordinaten

$$(b) \qquad \begin{cases} \bar{x}^{(k)} = x^{(k)} + x = 2x + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^k x_k, \\ \xi^{(k)} = x^{(k)} - x = \quad \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^k x_k. \end{cases}$$

Dann läßt sich (1) folgendermaßen umformen[3]),

$$S dx^{(k)2} - S dx^2 = S d\bar{x}^{(k)} d\xi^{(k)} = 0.$$

Da $\xi^{(k)}$ kein von ε freies Glied enthält, bleibt das Glied k-ter Ordnung von $\bar{x}^{(k)}$ ohne Einfluß bei der Produktbildung auf die Glieder bis zur k-ten Ordnung; also gilt

$$(2) \qquad S d\bar{x}^{(k-1)} d\xi^{(k)} = 0,$$

d. h. *die Bedingung* (1) *der Isometrie* k-ter *Stufe zweier Flächen ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß sich die Summenfläche* $(k-1)$-ter *Stufe und die Differenzenfläche* k-ter *Stufe durch Orthogonalität der Elemente entsprechen.*

Für $k = 1$ reduziert sich (2) auf $S dx d\xi^{(1)} = 0$, die bekannte Gleichung, durch welche man das Problem der unendlich kleinen Verbiegungen auf die Bestimmung einer Fläche O zurückführt, welche der gegebenen durch Orthogonalität der Elemente entspricht.

Aus (2) folgt weiter nach (b), wenn man $\bar{x}^{(k-1)} = 2x + \xi^{(k-1)}$ setzt und Glieder, die auf die k-te Ordnung in ε keinen Einfluß haben, von vornherein wegläßt,

$$(3) \qquad 2S dx d\xi^{(k)} + S d\xi^{(k-1)2} = 0.$$

Setzt man die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von ε gleich Null, so zerfällt (3) in folgende Reihe von k Bedingungen zur Bestimmung der $3k$ Zusatzkoordinaten:

$$(3') \qquad 2S dx dx_\lambda + S[dx_1 dx_{\lambda-1} + dx_2 dx_{\lambda-2} + \ldots + dx_{\lambda-1} dx_1] = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

[3]) Mit S soll die Summation nach Koordinaten xyz, mit Σ nach Potenzen von ε bezeichnet werden.

ie mit wachsendem k unbegrenzt erweitert werden kann und als *Rekursionsformel* zur schrittweisen Bestimmung der Zusatzkoordinaten x_λ dient.

§ 3.

Existenz einer charakteristischen Funktion.

Um die Größen x_λ tatsächlich zu bestimmen, gehen wir von der Orthogonalitätsbedingung (2) aus. Nimmt man an, die Isometrie $(k-1)$-ter Stufe sei bereits gefunden, so ist (2) eine Bestimmungsgleichung für $\xi^{(k)}$ oder genauer für den letzten, allein noch unbekannten Summanden $\varepsilon^k x_k$ von $\xi^{(k)}$; sie reduziert sich auf die k-te Bedingung des Systems (3′). Anderseits kann man nach Weingarten das Problem der Orthogonalität mittels einer „charakteristischen Funktion" auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Setzt man

$$\Psi^{(k)} = \frac{1}{4} S\left(\bar{x}_u^{(k-1)} \xi_v^{(k)} - \bar{x}_v^{(k-1)} \xi_u^{(k)}\right) \tag{4}$$

als charakteristische Funktion an, so genügt $\Psi^{(k)}$ einer linearen partiellen Differentialgleichung ohne zweites Glied, deren Koeffizienten von $\bar{x}^{(k-1)}$, $\bar{y}^{(k-1)}$, $\bar{z}^{(k-1)}$ abhängen; nach Integration dieser charakteristischen Gleichung ergeben sich $\xi^{(k)}$, $\eta^{(k)}$, $\zeta^{(k)}$ durch Quadraturen. Da jedoch von den Zusatzkoordinaten, aus denen $\xi^{(k)}$, $\eta^{(k)}$, $\zeta^{(k)}$ aufgebaut sind, alle mit Ausnahme der letzten x_k, y_k, z_k in den Koeffizienten dieser Gleichung auftreten, ist sie zur Bestimmung von $\xi^{(k)}$, $\eta^{(k)}$, $\zeta^{(k)}$ als Ganzes ungeeignet; dagegen ist sie, wenn die Isometrie $(k-1)$-ter Stufe bereits bekannt ist, zur Bestimmung des letzten Summanden $\varepsilon^k x_k$ von $\xi^{(k)}$ usw. brauchbar, liefert also die Isometrie k-ter Stufe. Sie hat den Charakter einer Rekursionsformel.

Entwickelt man $\Psi^{(k)}$ nach Potenzen von ε, so folgt nach (b) unter Weglassung von höheren als der k-ten Potenz

$$\Psi^{(k)} = \frac{1}{4} S\left(\bar{x}_u^{(k-1)} \xi_v^{(k)} - \bar{x}_v^{(k-1)} \xi_u^{(k)}\right) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{k} \varepsilon^\lambda S\left(x_u x_{\lambda v} - x_v x_{\lambda u}\right) \tag{4'}$$

$$= \frac{1}{2} S\left(x_u \xi_v^{(k)} - x_v \xi_u^{(k)}\right),$$

also

$$\Psi^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{k} \varepsilon^\lambda \Psi_\lambda, \tag{4''}$$

wenn

$$\Psi_k = \frac{1}{2} S\left(x_u x_{kv} - x_v x_{ku}\right)$$

gesetzt wird. Diese neue charakteristische Funktion genügt einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zweitem Glied, und zwar für beliebig hohes k. Sie ist der Koeffizient von ε^k in der ursprünglichen charakteristischen Gleichung für $\Psi^{(k)}$.

§ 4.

Die charakteristische Gleichung.

Um die charakteristische Gleichung aufzustellen, führen wir neben dem Linienelement der Ausgangsfläche:

$$ds^2 = S\,dx^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

noch das Linienelement der Differenzenfläche $(k-1)$-ter Stufe ein:

$$d\sigma^{(k-1)2} = S\,d\xi^{(k-1)2} = \mathsf{E}^{(k-1)}\,du^2 + 2\mathsf{F}^{(k-1)}\,du\,dv + \mathsf{G}^{(k-1)}\,dv^2$$

und berücksichtigen (3), so ist

$$(5)\qquad \begin{cases} S\,x_u\,\xi_u^{(k)} = -\frac{1}{2}\mathsf{E}^{(k-1)}, \\ S\,x_u\,\xi_v^{(k)} + S\,x_v\,\xi_u^{(k)} = -\mathsf{F}^{(k-1)}, \\ S\,x_v\,\xi_v^{(k)} = -\frac{1}{2}\mathsf{G}^{(k-1)}; \end{cases}$$

dazu (4′)

$$S\,x_u\,\xi_r^{(k)} - S\,x_r\,\xi_u^{(k)} = 2\Psi^{(k)}.$$

Das Gleichungssystem (4′), (5) genügt unter Elimination der Größen $\xi^{(k)}, \eta^{(k)}, \zeta^{(k)}$ zur Aufstellung der Differentialgleichung für $\Psi^{(k)}$. Im einfachsten Fall $\mathsf{E} = \mathsf{F} = \mathsf{G} = 0$ reduziert sich die Aufgabe auf die Aufstellung der Weingartenschen charakteristischen Gleichung[4]). Da der Gang der Ableitung im allgemeinen Fall im wesentlichen derselbe ist, sind Zwischenrechnungen im folgenden weitgehend unterdrückt. Überdies ist die Aufgabe in formaler Hinsicht identisch mit der von Voß[5]) gelösten Aufgabe, die charakteristische Gleichung für beliebige, nicht isometrische Flächendeformationen aufzustellen.

Man entnimmt aus (4′), (5) die vier Summen $S\,x_u\,\xi_u^{(k)}$, $S\,x_u\,\xi_r^{(k)}$, $S\,x_r\,\xi_u^{(k)}$, $S\,x_r\,\xi_r^{(k)}$, differentiiert jede in der Weise, daß die $\xi_{uv}^{(k)}$ auftreten, und entfernt diese zweiten Differentialquotienten wieder durch Differenzenbildung; so folgt (unter einstweiliger Weglassung der oberen Indizes):

$$(6)\qquad \begin{cases} S\,x_{uu}\,\xi_v - S\,x_{uv}\,\xi_u = \frac{1}{2}\mathsf{E}_v - \frac{1}{2}\mathsf{F}_u + \Psi_u, \\ S\,x_{vv}\,\xi_u - S\,x_{uv}\,\xi_v = \frac{1}{2}\mathsf{G}_u - \frac{1}{2}\mathsf{F}_v - \Psi_v. \end{cases}$$

[4]) Die Bezeichnung schließt sich nach Möglichkeit an L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie an; im folgenden mit B. zitiert. Die Seitenzahlen beziehen sich auf die 1. Auflage der deutschen Ausgabe. B. S. 288–292.

[5]) A. Voß, Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformationen einer Fläche. Sitzungsber. d. k. bayr. Akad. d. Wiss. **34** (1904), S. 141 u. f. Besonders § 1 Gl. (1) u. (7).

Dann lassen sich die zweiten Differentialquotienten von x mittels der ersten Gruppe der Fundamentalgleichungen der Flächentheorie[6]) durch die ersten Differentialquotienten x_u, x_v und die Normalenrichtung X ausdrücken, wobei als Koeffizienten die Christoffelschen Symbole zweiter Art $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ und die Koeffizienten D, D', D'' der zweiten Fundamentalform auftreten. Mit Rücksicht auf (4′), (5) folgt aus (6)

$$\begin{aligned} & DSX\xi_v - D'SX\xi_u \\ &= \Psi_u - \left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right]\Psi + \frac{1}{2}\left[\mathsf{E}_v - \mathsf{F}_u - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\mathsf{E} + \left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right]\mathsf{F} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\mathsf{G}\right], \\ & -D'SX\xi_v + D''SX\xi_u \\ &= -\Psi_v + \left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]\Psi + \frac{1}{2}\left[\mathsf{G}_u - \mathsf{F}_v + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\mathsf{E} + \left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]\mathsf{F} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\mathsf{G}\right]. \end{aligned}$$

Nun empfiehlt sich eine Änderung der Bezeichnung. Durch Abspaltung des Faktors $\sqrt{EG - F^2}$ wird mittels der Gleichung $\Psi = \sqrt{EG - F^2}\,\Phi$ eine neue charakteristische Funktion Φ eingeführt; ähnlich werden die Fundamentalformen geändert:

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathsf{E}du^2 + 2\mathsf{F}du\,dv + \mathsf{G}dv^2 = 2\sqrt{EG - F^2}\,(P du^2 + 2Q\,du\,dv + R\,dv^2), \\ & D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2 = \sqrt{EG - F^2}\,(\delta\,du^2 + 2\delta'du\,dv + \delta''dv^2). \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Dann ergibt sich aus (7) infolge bekannter Beziehungen zwischen den Christoffelschen Symbolen[7]):

$$\left\{ \begin{aligned} \delta SX\xi_v - \delta' SX\xi_u &= \Phi_u + P_v - Q_u + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}P - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}Q + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}R, \\ -\delta' SX\xi_v + \delta'' SX\xi_u &= -\Phi_v + R_u - Q_v + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}P - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}Q + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}R. \end{aligned} \right. \tag{7′}$$

Auf der rechten Seite treten neben Φ_u und Φ_v die beiden Koeffizienten der für das Linienelement der Differenzenfläche in bezug auf das Linienelement der Ausgangsfläche gebildeten trilinearen Kovariante auf, die in der ursprünglichen Weingartenschen Theorie fehlen. Führt man für sie die Abkürzungen ein:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= P_v - Q_u + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}P - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}Q + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}R, \\ \beta &= -R_u + Q_v - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}P + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}Q - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}R \end{aligned} \right. \tag{9}$$

und setzt außerdem, indem man aus der zweiten Fundamentalform noch das Krümmungsmaß K abspaltet:

$$\delta\,du^2 + 2\delta'du\,dv + \delta''dv^2 = K(\Delta\,du^2 + 2\Delta'du\,dv + \Delta''dv^2) \tag{8′}$$

[6]) B. S. 89.
[7]) B. S. 92.

so ergibt sich aus (7′)

$$(10)\qquad \begin{cases} S X \xi_u = \Delta'(\Phi_u + \alpha) - \Delta(\Phi_v + \beta), \\ S X \xi_v = \Delta''(\Phi_u + \alpha) - \Delta'(\Phi_v + \beta). \end{cases}$$

Jetzt ist die Elimination der ξ, η, ζ sofort ausführbar; betrachtet man die folgende Differenz und ihre identische Umformung

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial u} S X \xi_v - \frac{\partial}{\partial v} S X \xi_u = S X_u \xi_v - S X_v \xi_u,$$

so bemerkt man, daß man sie außer mit Hilfe von (10) noch in einer zweiten Weise darstellen kann: da nämlich X_u und X_v mittels der zweiten Gruppe der Fundamentalgleichungen der Flächentheorie durch x_u und x_v linear ausdrückbar sind[8]), ist die rechte Seite von (11) auf die in (4′), (5) auftretenden Summen zurückführbar. Es ergibt sich (unter Wiedereinführung der oberen Indizes):

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{\partial}{\partial u}[\Delta''(\Phi_u^{(k)} + \alpha^{(k-1)}) - \Delta'(\Phi_v^{(k)} + \beta^{(k-1)})]$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}[\Delta'(\Phi_u^{(k)} + \alpha^{(k-1)}) - \Delta(\Phi_v^{(k)} + \beta^{(k-1)})]$$

$$+ \Phi^{(k)}(E\delta'' - 2F\delta' + G\delta) - \begin{vmatrix} P^{(k-1)} & Q^{(k-1)} & R^{(k-1)} \\ E & F & G \\ \delta & \delta' & \delta'' \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist die charakteristische Gleichung für die Isometrie k-ter *Stufe*; sie ist, wie schon erwähnt, nur als Rekursionsformel brauchbar, da in den Koeffizienten das Linienelement der Differenzenfläche $(k-1)$-ter Stufe vorkommt, also die Isometrie $(k-1)$-ter Stufe als bekannt vorauszusetzen ist. Zum genaueren Studium ihrer Eigenschaften empfiehlt sich folgende Umformung: Führt man auf der linken Seite die Differentiationen aus, so treten die Differentialquotienten Δ, Δ', Δ'' gerade in den beiden Verbindungen $\frac{\partial \Delta''}{\partial u} - \frac{\partial \Delta'}{\partial v}$ und $\frac{\partial \Delta'}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial v}$ auf, in denen sie in den Codazzischen Gleichungen für das sphärische Bild vorkommen[9]), lassen sich also mittels des Linienelements des sphärischen Bildes $e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ und der zugehörigen Christoffelschen Symbole $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}'$ durch Δ, Δ', Δ'' selbst linear ausdrücken. Es ergibt sich

---

[8]) B. S. 90 (II).
[9]) B. S. 124 (6*).

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{A}') \qquad & \Delta'' \left[\Phi_{uu}^{(k)} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \Phi_u^{(k)} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \Phi_v^{(k)} + e\,\Phi^{(k)} \right] \\
& - 2\Delta' \left[\Phi_{uv}^{(k)} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \Phi_u^{(k)} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \Phi_v^{(k)} + f\,\Phi^{(k)} \right] \\
& + \Delta \left[\Phi_{vv}^{(k)} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \Phi_u^{(k)} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \Phi_v^{(k)} + g\,\Phi^{(k)} \right] \\
& + \Delta'' \left[\alpha_u^{(k-1)} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \alpha^{(k-1)} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \beta^{(k-1)} + \begin{vmatrix} P^{(k-1)} & Q^{(k-1)} \\ e & f \end{vmatrix} \right] \\
& - 2\Delta' \left[\frac{\alpha_v^{(k-1)} + \beta_u^{(k-1)}}{2} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \alpha^{(k-1)} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \beta^{(k-1)} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} P^{(k-1)} & R^{(k-1)} \\ e & g \end{vmatrix} \right] \\
& + \Delta \left[\beta_v^{(k-1)} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \alpha^{(k-1)} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \beta^{(k-1)} + \begin{vmatrix} Q^{(k-1)} & R^{(k-1)} \\ f & g \end{vmatrix} \right] = 0.
\end{aligned}
$$

Da (A′) in Δ, Δ', Δ'' homogen ist, können diese Größen auch durch D, D', D'' ersetzt werden.

Der Charakter als *Rekursionsformel* tritt jetzt mit voller Deutlichkeit hervor. *Für $k = 1$, also die gewöhnlichen unendlich kleinen Verbiegungen, ergibt sich Weingartens homogene charakteristische Gleichung; der nämlichen Differentialgleichung mit zweitem Glied genügt die charakteristische Funktion für die Isometrie k-ter Stufe.* Das zweite Glied ist von den Koeffizienten des Linienelementes der Differenzenfläche $(k-1)$-ter Stufe abhängig, also von denselben Größen, welche auch die Isometrie $(k-1)$-ter Stufe bestimmen.

Wichtig ist, daß (A′) in Φ, α, β, P, Q, R und den Differentialquotienten dieser Größen linear und homogen ist, und daß diese sämtlich ganze rationale Funktionen k-ter Ordnung in ε sind. Setzt man unter konsequenter Durchführung der in (a) eingeführten und wiederholt, z. B. in (4″) verwendeten Bezeichnungsart

$$
(12) \qquad \begin{cases} \Phi^{(k)} = \varepsilon\,\Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \ldots + \varepsilon^k \Phi_k, \\ P^{(k-1)} = \varepsilon^2 \Phi_1 + \varepsilon^3 \Phi_2 + \ldots + \varepsilon^k P_{k-1}, \\ \alpha^{(k-1)} = \varepsilon^2 \alpha_1 + \varepsilon^3 \alpha_2 + \ldots + \varepsilon^k \alpha_{k-1}, \end{cases}
$$

so weist der obere Index auf der linken Seite auf die Stufe der Isometrie hin, zu welcher die betreffende Größe gehört. Nun muß in (A′) der Koeffizient jeder Potenz von ε für sich verschwinden. *Also gilt die charakteristische Gleichung auch für die Größen mit unterem Index, d. h. für die bei der schrittweisen Erhöhung der Stufe hinzutretenden Zusatzglieder.*

§ 5.

Rekursionsformeln und Bestimmung der Koordinaten.

Mit Hilfe eines Integrals $\Phi^{(k)}$ der charakteristischen Gleichung lassen sich zunächst die Koordinaten der Differenzenfläche berechnen; der Weg ist in der Weingartenschen Theorie vorgezeichnet. Die Gleichungen (4′), (5), (10) drücken die sechs Summen

$$S x_u \xi_u^{(k)}, \quad S x_v \xi_u^{(k)}, \quad S X \xi_u^{(k)}, \quad S x_u \xi_v^{(k)}, \quad S x_v \xi_v^{(k)}, \quad S X \xi_v^{(k)}$$

durch $\Phi^{(k)}$, $P^{(k-1)}$, $Q^{(k-1)}$, $R^{(k-1)}$ und ihre Differentialquotienten aus. Die Auflösung dieses Systems von sechs linearen Gleichungen für $\xi_u^{(k)}, \eta_u^{(k)}, \zeta_u^{(k)}$, $\xi_v^{(k)}, \eta_v^{(k)}, \zeta_v^{(k)}$ ergibt:

$$(B)\quad \begin{cases} \xi_u^{(k)} = [\Delta'(\Phi_u^{(k)} + \alpha^{(k-1)}) - \Delta(\Phi_v^{(k)} + \beta^{(k-1)})]\, X \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \{[-P^{(k-1)} G + (Q^{(k-1)} + \Phi^{(k)}) F]\, x_u \\ \qquad + [P^{(k-1)} F - (Q^{(k-1)} + \Phi^{(k)}) E]\, x_v\}, \\ \xi_v^{(k)} = [\Delta''(\Phi_u^{(k)} + \alpha^{(k-1)}) - \Delta'(\Phi_v^{(k)} + \beta^{(k-1)})]\, X \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \{[-(Q^{(k-1)} - \Phi^{(k)}) G + R^{(k-1)} F]\, x_u \\ \qquad + [(Q^{(k-1)} - \Phi^{(k)}) F - R^{(k-1)} E]\, x_v\}. \end{cases}$$

Damit sind $\xi^{(k)}, \eta^{(k)}, \zeta^{(k)}$ durch je eine Quadratur aus einem vollständigen Differential bestimmt; die Integrabilitätsbedingung des Systems (B) ist eben die charakteristische Gleichung (A).

Aus (B) ergeben sich unmittelbar die Größen $\mathsf{E}^{(k)} = S\,\xi_u^{(k)2}$, $\mathsf{F}^{(k)} = S\,\xi_u^{(k)}\xi_v^{(k)}$, $\mathsf{G}^{(k)} = S\,\xi_v^{(k)2}$ und damit nach (8) $P^{(k)}, Q^{(k)}, R^{(k)}$:

$$(C)\quad \begin{cases} \mathsf{E}^{(k)} = 2P^{(k)}\sqrt{EG - F^2} = [\Delta'(\Phi_u^{(k)} + \alpha^{(k-1)}) - \Delta(\Phi_v^{(k)} + \beta^{(k-1)})]^2 \\ \qquad + [P^{(k-1)2} G - 2P^{(k-1)}(Q^{(k-1)} + \Phi^{(k)}) F + (Q^{(k-1)} + \Phi^{(k)})^2 E] \\ \mathsf{F}^{(k)} = 2Q^{(k)}\sqrt{EG - F^2} = [\Delta'(\Phi_u^{(k)} + \alpha^{(k-1)}) - \Delta(\Phi_v^{(k)} + \beta^{(k-1)})] \\ \qquad \cdot [\Delta''(\Phi_u^{(k)} + \alpha^{(k-1)}) - \Delta'(\Phi_v^{(k)} + \beta^{(k-1)})] \\ \qquad + [P^{(k-1)}(Q^{(k-1)} - \Phi^{(k)}) G - (P^{(k-1)} R^{(k-1)} + Q^{(k-1)2} - \Phi^{(k)2}) E \\ \qquad + R^{(k-1)}(Q^{(k-1)} + \Phi^{(k)}) E], \\ \mathsf{G}^{(k)} = 2R^{(k)}\sqrt{EG - F^2} = [\Delta''(\Phi_u^{(k)} + \alpha^{(k-1)}) - \Delta'(\Phi_v^{(k)} + \beta^{(k-1)})]^2 \\ \qquad + [(Q^{(k-1)} - \Phi^{(k)})^2 G - 2R^{(k-1)}(Q^{(k-1)} - \Phi^{(k)}) F + R^{(k-1)2} E] \end{cases}$$

Die Gleichungssysteme (B) und (C) sind Rekursionsformeln, und zwar besitzt (B) denselben einfachen linearen Aufbau wie (A); das System (B) gilt also auch für die Größen mit unteren Indizes, und bestimmt dann

die Zusatzkoordinaten jeder Stufe aus dem Zusatzglied der charakteristischen Funktion gleicher Stufe und den Zusatzgliedern des Linienelements der Differenzenfläche nächst niedrigerer Stufe. Viel weniger einfach ist der Bau der Gleichungen (C). Ihre rechte Seite ist bis zur $(k+1)$-ten Potenz von ε bestimmt; sie ergeben aus dem Linienelement der Differenzenfläche $(k-1)$-ter Stufe und der charakteristischen Funktion k-ter Stufe das Linienelement der Differenzenfläche k-ter Stufe. Aber sie lassen wegen des quadratischen Aufbaus der rechten Seite die Zusatzglieder k-ter Stufe P_k, Q_k, R_k nicht durch eine einzige Reihe von Zusatzgliedern nächst niedrigerer Ordnung und eine einzige charakteristische Zusatzfunktion ausdrücken, gelten also für die Größen mit unterem Index nicht in derselben einfachen Form.

Für die tatsächliche Durchführung der Verbiegung durch schrittweise Näherung hat man mittels (A) und (C) abwechselnd die Stufenzahl der charakteristischen Funktion und des Linienelements der Differenzenfläche je um eine Einheit zu erhöhen. Ist die gewünschte Stufe erreicht, so liefert (B) die sämtlichen Zusatzkoordinaten auf einen Schlag. Ist das gewöhnliche Problem der unendlich kleinen Verbiegungen gelöst, so reduziert sich das Problem der Isometrie k-ter Stufe auf die Integration der nämlichen charakteristischen Gleichung, aber mit zweitem Glied, das für jede Stufe aus der charakteristischen Funktion der vorigen Stufe durch Differentiationsprozesse zu gewinnen ist. Für die Auswahl der partikulären Integrale wird der Gesichtspunkt maßgebend sein, daß singuläre Stellen, welche nicht bereits in den charakteristischen Funktionen niedrigerer Stufe vorkommen, nach Möglichkeit vermieden werden. So wird im allgemeinen zu einem durch eine bestimmte unendlich kleine Verbiegung festgelegtes Anfangsglied der Reihe eine naturgemäße Weiterentwicklung existieren.

Die Integration ist stets dann in formaler Weise durch Quadraturen möglich, wenn die Integration der verkürzten charakteristischen Gleichung selbst in dieser Weise durch die Laplacesche Methode geleistet wird[10]). *In allen diesen Fällen, in denen das Problem der unendlich kleinen Verbiegungen vollständig gelöst werden kann, ist mithin auch die Aufgabe der Isometrie beliebig hoher Stufe auf eine Folge von Differentiationen und Quadraturen zurückgeführt.*

---

[10]) Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen, deutsche Ausgabe, 2. Aufl., S. 452 u. ff.

§ 6.

Angaben über die Verbiegung der Kugel.

Um die Verbiegung der Kugel zu behandeln, geht man von den geographischen Koordinaten ϑ, v (Polabstand und geographische Länge) mittels der Substitution $u = \lg \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ zu isothermen Parametern u, v über; von diesen durch $u + iv = \lg \sigma$, $u - iv = -\lg \varrho$ zu den Parametern ϱ, σ der Minimalgeraden auf der Kugel. Dann nimmt die charakteristische Gleichung die beiden Formen an:

$$(A_1) \qquad \Phi_{uu}^{(k)} + \Phi_{vv}^{(k)} + \frac{2}{\mathfrak{Cof}^2 u} \Phi^{(k)} = -(\alpha_u^{(k-1)} + \beta_v^{(k-1)}),$$

$$(A_2) \qquad \Phi_{\varrho\sigma}^{(k)} - \frac{2}{(\varrho+\sigma)^2} \Phi^{(k)} = -\frac{1}{2}(\alpha_\sigma^{(k-1)} + \beta_\varrho^{(k-1)}).$$

Von diesen beiden Gleichungen ist die zweite der Integration durch die Laplacesche Invariantentheorie unmittelbar zugänglich; sie ist nach Darboux[11]) vom zweiten Rang. Das allgemeine Integral der verkürzten Gleichung ist

$$(13) \qquad \Phi_1 = \frac{R+S}{\varrho+\sigma} - \frac{1}{2}(R' + S'),$$

wenn $R = R(\varrho)$ und $S = S(\sigma)$ zwei willkürliche Funktionen bezeichnen. Um auch das Integral der vollständigen Gleichung in gedrängter Form schreiben zu können, sei die rechte Seite von (A_2) mit $V(\varrho, \sigma)$ bezeichnet; dann wird

$$(13') \qquad \Phi = (\varrho+\sigma)^2 \frac{\partial^2}{\partial\varrho\,\partial\sigma} \frac{\Omega}{\varrho+\sigma},$$

wo zur Abkürzung

$$\Omega = \iiiint \frac{V}{\varrho+\sigma} d\varrho\, d\varrho\, d\sigma\, d\sigma$$

gesetzt ist. Die bei der Integration eingehenden willkürlichen Funktionen ergeben gerade wieder das allgemeine Integral der verkürzten Gleichung.

Damit sind alle Integrationen der Differentialgleichungen geleistet, die zur Bestimmung der allgemeinsten Verbiegung der Kugel von beliebig hoher Stufe notwendig sind, und es bleiben nur noch stets ausführbare Operationen übrig. Geht man von der Darstellung der Kugel aus:

$$(14) \qquad x = \frac{1+\varrho\sigma}{\varrho+\sigma}, \qquad y = i\frac{1-\varrho\sigma}{\varrho+\sigma}, \qquad z = \frac{\varrho-\sigma}{\varrho+\sigma},$$

[11]) G. Darboux, Théorie générale des surfaces 2, S. 142, 143. Die erste Stufe ist auch sonst vielfach behandelt.

so erhält man die Zusatzkoordinaten für die beiden ersten Stufen in folgender Form:

$$(15)\quad x_1 = i\int[(\Phi_{1\varrho}x - \Phi_1 x_\varrho)\,d\varrho - (\Phi_{1\sigma}x - \Phi_1 x_\sigma)\,d\sigma],\ ^{11})$$

$$(16)\quad x_2 = \frac{(\varrho+\sigma)^2}{4}\Phi_{1\varrho}\Phi_{1\sigma}x - \int\Big[\Big(\frac{1}{2}\Phi_1^2 x_\varrho + \frac{(\varrho+\sigma)^2}{4}\Phi_{1\varrho}^2 x_\sigma\Big)\,d\varrho + \Big(\frac{1}{2}\Phi_1^2 x_\sigma + \frac{(\varrho+\sigma)^2}{4}\Phi_{1\sigma}^2 x_\varrho\Big)\,d\sigma\Big]$$

und analog für y, z. Bemerkenswert ist bei der Durchführung, daß die rechte Seite der charakteristischen Gleichung auch noch für die zweite Stufe verschwindet, also $\Phi_2 = 0$ ist; das hängt mit der Tatsache zusammen, daß unter allen Biegungsflächen der Kugel für die Kugel selbst die mittlere Krümmung ein Minimum wird, und zwar in jedem Punkt [12]).

Die Beschränkung auf *reelle Biegungsflächen* kann dadurch erzielt werden, daß man

$$(17)\qquad R = -\varrho f\Big(\lg\frac{1}{\varrho}\Big), \qquad S = \sigma f(\lg\sigma)$$

setzt, wo f und $\bar{f}$ konjugiert komplexe Funktionen sind. Dann wird bei Übergang zu isothermen Parametern

$$(18)\qquad \Phi_1 = \mathfrak{Tg}\,u\,\Re f(u+iv) - \frac{\partial}{\partial u}\Re f(u+iv); \qquad \Phi_2 = 0.$$

Speziell gibt $R = -\varrho^{1-n}$, $S = \sigma^{1+n}$ die *Liebmannschen Gleitverbiegungen* [13]); die zugehörige charakteristische Funktion ist $\Phi_1 = e^{nu}[\mathfrak{Tg}\,u - n]\cos nv$. Auf die Angabe der Zusatzkoordinaten, die für die zweite Stufe schon etwas weitschweifig werden, sei verzichtet. Die Gleitverbiegungen besitzen bekanntlich nur *einen* singulären Punkt auf der Kugelfläche; bemerkenswert ist, daß auch bei der zweiten Stufe der Verbiegung keine neue Singularität hinzukommt. Dagegen geht die charakteristische Eigenschaft der Gleitverbiegungen, daß ein Parallelkreis in eine ebene Kurve übergeht, bei der zweiten Stufe der Deformation verloren.

---

[12]) Dingler, Beiträge zur Kenntnis der infinitesimalen Deformationen einer Fläche. Diss. München 1907, S. 30, 31.

[13]) Liebmann, a. a. O. S. 38, 39.

(Eingegangen am 1. März 1923.)

Nachträgliche Bemerkung zu dem Aufsatz: „Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen".

Von

Heinrich Tietze in Erlangen.

Auf zwei bei Abfassung des Aufsatzes (Mathematische Zeitschrift **16**, S. 308—317) mir nicht bekannte Stellen in der Literatur bin ich inzwischen freundlicherweise aufmerksam gemacht worden. Der Gedanke, die die Vektoränderung bei einem Umlauf darstellenden Integrale bis auf Größen höherer Ordnung nach dem Muster des Gauß-Greenschen Satzes zu berechnen, findet sich bereits bei Levi-Civita in seinen 1921 in Spanien gehaltenen, als Buch erschienenen Vorlesungen[1]). (Die dort nicht gegebene Durchführung im einzelnen hinsichtlich der Voraussetzungen und Fehlerabschätzungen hat Herr Levi-Civita, wie ich seiner persönlichen Mitteilung entnehme, inzwischen in Vorlesungen 1920/21 vorgetragen, deren Veröffentlichung in Vorbereitung ist.) Ebenso trifft sich mein Aufsatz mit Entwicklungen in einer Arbeit von Wirtinger[2]), die, wie ich von Herrn Wirtinger erfahre, von ihm seither auch vorgetragen wurden, — Entwicklungen übrigens von wesentlich allgemeineren Gesichtspunkten, als diejenigen meiner Note (vgl. l. c. [2]), S. 443, Nr. 7; die auftretenden Funktionen werden daselbst regulär analytisch vorausgesetzt).

Erlangen, Mathematisches Seminar, 5. August 1923.

[1]) T. Levi-Civita, Questions de mecànica clàssica i relativista, Institut d'estudis Catalans, Barcelona, S. 108.

[2]) W. Wirtinger, Cambridge Philosophical Transactions **22**, Nr. 23, S. 439—448 (May 1922), Received July 23., Read October 31. 1921.

(Eingegangen am 2. August 1923.)

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Felix Klein
Gesammelte mathematische Abhandlungen

in 3 Bänden:

Band I:

Liniengeometrie – Grundlegung der Geometrie – Zum Erlanger Programm. Herausgegeben von R. Fricke und A. Ostrowski. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) Mit einem Bildnis. (XII, 612 S.) 1921. 18 Goldmark / 6 Dollar

Band II:

Anschauliche Geometrie, Substitutionsgruppen und Gleichungstheorie, Zur mathematischen Physik. Herausgegeben von E. Fricke und H. Vermeil. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) Mit 185 Textfiguren. (VI, 714 S.) 1922. 18 Goldmark / 6 Dollar

Band III:

Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, hyperelliptische und Abelsche Funktionen, allgemeine Riemannsche Funktionentheorie und automorphe Funktionen. Herausgegeben von R. Fricke, H. Vermeil und E. Bessel-Hagen. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen. Mit 138 Textfiguren. (IX, 774 S. und 36 Anhangseiten.) 1923. 24 Goldmark / 7.20 Dollar

Für das Inland: Goldmark, zahlbar nach dem amtlichen Berliner Dollarbriefkurs des Vortages. Für das Ausland: Gegenwert des Dollars in der betreffenden Landeswährung, sofern sie stabil ist, oder in Dollar, englischen Pfunden, Schweizer Franken, holländischen Gulden.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

v. Laue, Prof. Dr. M. **Die Relativitätstheorie.** 2. Band: Die allgemeine Relativitätstheorie und Einsteins Lehre von der Schwerkraft. 2. Auflage. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1921. (XII u. 276 S.)

Bohr, Prof. Dr. Niels. **Drei Vorträge über Spektren und Atombau.** Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1922. (VI u. 148 S.)

Study, Prof. Dr. E. **Denken und Darstellung, Logik und Werte, Dingliches und Menschliches in Mathematik und Naturwissenschaften.** Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1921. (IV u. 43 S.)

Kneser, Prof. Dr. A. **Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik.** 2. Auflage. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1922. (VIII u. 292 S.)

Einstein, Prof. Dr. A. **Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie,** gehalten im Mai 1921 an der Universität Princeton. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1922. (70 S.)

Study, Prof. Dr. E. **Mathematik und Physik.** Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1923. (31 S.)

Seeliger, Prof. Dr. R. **Aufgaben aus der theoretischen Physik.** Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1921. (X u. 154 S.)

Czuber, Prof. Dr. E. **Mathematische Bevölkerungstheorie,** dargestellt auf Grund von **G. H. Knibs'** The Mathematical theory of Population. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1923. (XVI u. 357 S.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von L. Lichtenstein. Band 46, Jahrgang 1916—1918. Heft 2, S. 561—960. Vierter und fünfter Abschnitt (Analysis und Geometrie). Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1923.

Lorenz, H. Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik. Zweite, verbesserte Auflage. 176 S. 8°. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin. 1923.

Schrutka, Lothar, **Zahlenrechnen.** (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher 20). Leipzig-Berlin, Teubner, 1923. (X u. 146 S. 8°.)

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.